



# Symétries nucléaires à faible isospin

O. Juillet

## ► To cite this version:

O. Juillet. Symétries nucléaires à faible isospin. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université de Caen, 1999. Français. NNT: . in2p3-00008665

**HAL Id: in2p3-00008665**

**<https://hal.in2p3.fr/in2p3-00008665>**

Submitted on 6 Oct 2016

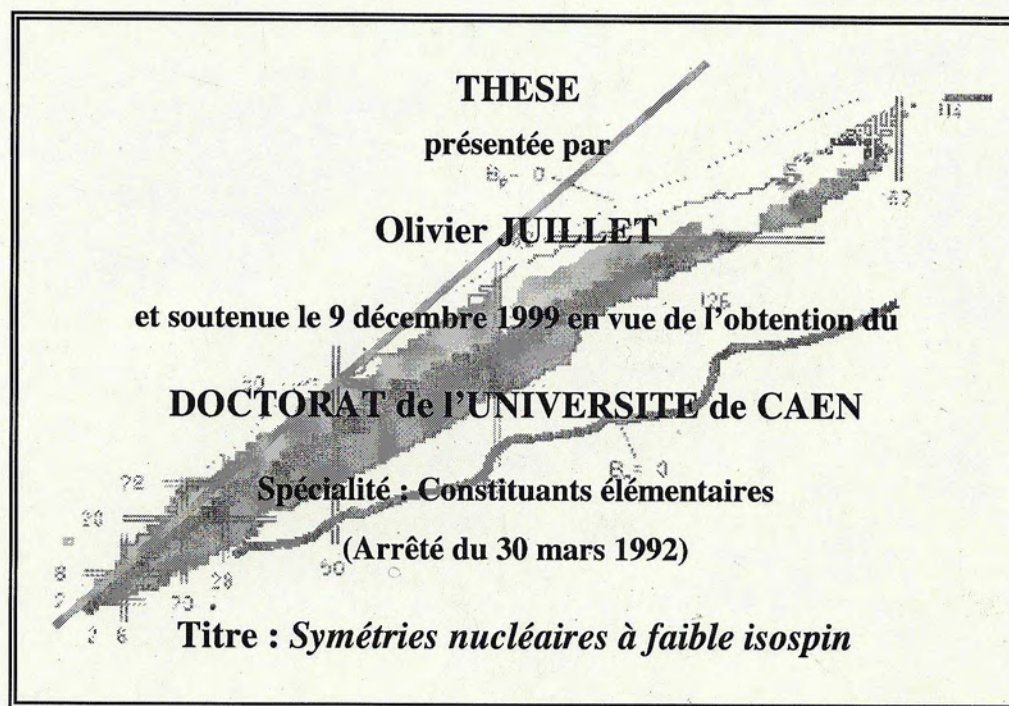
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Université de CAEN/BASSE-NORMANDIE**

**UFR Sciences - Ecole Doctorale SIMEM**

**Grand Accélérateur National d'Ions Lourds**



*Composition du jury :*

Monsieur **R. Arvieu**, *Professeur d'université, Rapporteur*

Monsieur **G. Auger**, *Directeur de recherches CNRS*

Monsieur **J. P. Blaizot**, *Directeur de recherches CNRS*

Monsieur **O. Naviliat-Cuncic**, *Professeur d'université*

Monsieur **P. Schuck**, *Directeur de recherches CNRS, Rapporteur*

Monsieur **P. Van Isacker**, *Chercheur CEA, Directeur de thèse*



## Remerciements

*Avec ce mémoire, non seulement trois années de travail voient leur aboutissement, mais simultanément, s'achève la réalisation d'un défi personnel. Que tous ceux qui m'ont aidé à le réussir trouvent ici l'expression de ma plus profonde reconnaissance.*

*Mes premières pensées iront à mes parents dont le soutien moral et matériel m'a toujours permis de concrétiser ma passion pour la physique théorique dans les meilleures conditions.*

*Je tiens aussi à remercier la direction du GANIL pour m'avoir successivement accueilli ces dernières années. J'y associe les physiciens, étudiants et agents administratifs qui ont contribué à me faire bénéficier d'un contexte scientifique de tout premier rang.*

*Je voudrais plus précisément exprimer ma gratitude à mon directeur de thèse, Piet Van Isacker, pour l'ensemble des connaissances qu'il m'a transmises ainsi que pour m'avoir permis d'aborder la recherche fondamentale avec un soucis constant de rigueur et d'honnêteté scientifique. Je le remercie par ailleurs pour l'autonomie qu'il m'a laissée dans le développement et l'organisation quotidienne de mes activités de recherche.*

*Je souhaite également témoigner ma reconnaissance à Gérard Auger pour son aide permanente et pour les nombreuses discussions connexes que nous avons pu avoir. Je remercie en outre les autres membres du jury, Messieurs R. Arvieu, J.P. Blaizot, O. Naviliat-Cuncic, P. Schuck, de l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à mon travail avec une attention particulière aux 2 rapporteurs.*

*Je voudrais encore associer à ces remerciements les chercheurs de l'université de La Rochelle pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en m'accordant une activité d'enseignement riche et diversifiée. Merci aussi à Christelle R., Myriam G., Valérie T., Valérie B. et à toute la petite équipe de chimistes pour l'accueil que vous me réserviez chaque semaine.*

*Enfin, je ne saurais oublier les étudiants du GANIL avec lesquels j'ai eu l'occasion de passer des moments agréables ainsi que Jérôme G., Sébastien J. et Cédric G. dont l'amitié m'apporte réconfort et motivation.*

Olivier Juillet



# Sommaire

<b>Introduction.....</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 1 : Approches algébriques en mécanique quantique .....</b>	<b>5</b>
■ I - Définition et propriétés générales des opérateurs de symétrie d'un système physique.....	6
■ II - Spécificités inhérentes à l'existence d'une loi de groupe.....	9
① Postulats de définition d'un groupe .....	9
② Représentation de la structure de groupe en théorie quantique .....	11
③ Compléments à propos des groupes continus .....	12
④ Structuration de l'espace des états induite par le groupe de symétrie .....	20
■ III - Notion d'invariance dynamique.....	28
■ IV - Exemples d'implémentation .....	31
① Formule de masse des hadrons .....	31
② Structure collective des noyaux : modèle IBM.....	33
③ Niveaux d'énergie des édifices moléculaires .....	44
<b>Chapitre 2 : Symétries des modèles de fermions en interaction pour les noyaux <math>N=Z</math>.....</b>	<b>53</b>
■ I – Invariance spin-isospin de Wigner .....	54
① Présentation mathématique.....	54
② Conséquences physiques et validité .....	57
■ II – Extension aux noyaux lourds par utilisation du pseudo-spin .....	65
① Aspects généraux .....	65
② Construction et examen critique d'une pseudo-classification de Wigner.....	68
<b>Chapitre 3 : Réalisation en bosons des invariances de la ligne <math>N=Z</math> .....</b>	<b>77</b>
■ I – Modèle IBM-4.....	78
① Description des bosons .....	78
② Structure algébrique .....	79



③ Calculs numériques .....	82
④ Quelques résultats analytiques .....	83
 ■ II – Schémas généraux de construction microscopique .....	88
① Introduction.....	88
② Méthodes d'expansion des observables .....	89
③ Algorithmes de bosonisation par connexion des états.....	95
 ■ III – Un premier exemple : influence du potentiel spin-orbite sur le développement des corrélations superfluides dans les noyaux $N=Z$ .....	98
① Présentation générale de l'étude .....	98
② Isospin du niveau fondamental des noyaux impair-impair $N=Z$ .....	102
③ Evolution de la structure en paires .....	105
④ Rôle de l'appariement isoscalaire dans les anomalies de masse de Wigner .....	111
 ■ IV – Un second exemple : spectroscopie des noyaux $N=Z$ au delà du $^{56}\text{Ni}$ .....	112
① Introduction.....	112
② Aspects formels des calculs IBM-4 dans la couche pseudo-sd .....	114
③ Résultats.....	119
 <b>Conclusion</b> .....	133
 <b>Annexe</b> .....	135



## Introduction

Avec les nouvelles opportunités expérimentales offertes par les faisceaux radioactifs, l'un des enjeux majeurs de la physique nucléaire actuelle réside dans l'observation et l'interprétation des propriétés des noyaux loin de la stabilité. Du côté riche en protons, la majorité des efforts se concentrent en fait sur les systèmes présentant des nombres similaires de protons et de neutrons. Ces noyaux sont en effet susceptibles de développer une superfluidité proton-neutron dont l'importance vis-à-vis des corrélations d'appariement entre nucléons identiques fait l'objet de nombreux travaux théoriques.

En particulier, une telle compétition a déjà été étudiée dans le cadre d'approximations de champ moyen (formalismes BCS et HFB) [cf. article de synthèse Goo99], mais des études schématiques semblent indiquer qu'il faille aller au-delà de ces approximations en présence d'appariement proton-neutron [Eng96, Civ97, Dob98]. Par ailleurs, la structure de la ligne  $N = Z$  a également été recherchée à partir du modèle en couches grâce à la diagonalisation directe de l'hamiltonien [Pov98] ou en faisant appel à des techniques Monte-Carlo [Dea95, Lan96, Lan97, Dea97]. Dans le premier cas, il n'est toutefois pas possible d'étendre les calculs à un nombre élevé de particules dans l'espace  $fp - g_{9/2}$  alors que, dans le second, l'obtention d'une spectroscopie détaillée est rendue délicate par la nécessité de travailler à température non nulle et par les incertitudes qu'engendre l'utilisation d'une procédure d'extrapolation. Il convient néanmoins de signaler qu'une méthode hybride (QMCD), proposée par Otsuka & al [cf. article de synthèse Ots99], apparaît en mesure de pouvoir traiter la majorité des noyaux  $N = Z$  de la couche  $fp$  bien qu'à ce jour aucune application à des systèmes impair-impair n'ait été réalisée.

En outre, même si les progrès informatiques ont tendance à favoriser la mise en œuvre de ces calculs numériques complexes, il faut bien prendre conscience que leur utilisation exclusive risque de masquer l'origine physique réelle de certains phénomènes constatés dans les résultats. Il est en particulier instructif de se rappeler que l'explication des bandes rotationnelles dans le contexte du modèle en couches, permettant ainsi d'établir une connexion avec le modèle collectif de Bohr et Mottelson, n'est intervenue que par construction d'une interaction analytiquement soluble en terme du groupe continu  $SU(3)$  [Ell58]. La recherche d'hamiltoniens reflétant l'essentiel de la structure des systèmes étudiés tout en étant exactement diagonalisables conserve donc un intérêt primordial. De plus, le recours fréquent aux méthodes de la théorie des groupes dans la résolution de ces modèles donne la possibilité de mettre en exergue des invariances abstraites de l'interaction nucléaire effective qu'il aurait été difficile d'appréhender dans une approche purement numérique. Concernant spécifiquement les noyaux  $N = Z$ , de telles considérations simplifiées ont en fait déjà été proposées : on peut par exemple citer le modèle  $SO(8)$  de Flowers et Szpikowski qui s'intéresse à un ensemble de nucléons interagissant dans des orbites dégénérées via des forces d'appariement à spins parallèles et à spins antiparallèles [Flo64]. Pour l'aspect collectif, des



descriptions en bosons ont également été élaborées dans l'esprit du modèle IBM de Arima et Iachello [Ari75] dont il est utile de rappeler qu'il s'est progressivement imposé au niveau des noyaux stables de masse moyenne ou élevée de par son succès à interpréter dans un même cadre la diversité des structures observées. Par la prise en compte des degrés de liberté proton-neutron, les approches IBM-3 et IBM-4 d'Elliott & al [Ell80, Ell81] visent en fait à atteindre un objectif similaire pour les systèmes  $N = Z$ . D'ailleurs, l'approximation IBM-3, où seuls des bosons isovectoriels sont considérés, s'est avérée concluante pour les noyaux pair-pair au-delà du  $^{56}\text{Ni}$  et ce, aussi bien en déduisant microscopiquement l'hamiltonien [Ell96] qu'en l'ajustant sur les données expérimentales [Gar99]. En revanche, le formalisme IBM-4, beaucoup plus complexe à cause de l'inclusion des paires isoscalaires, n'avait été jusqu'alors utilisé que dans des calculs schématiques [Hal84, Hal85, Han87, Van97] et nécessitait par conséquent un examen plus approfondi qui va précisément faire l'objet d'une part importante de ce mémoire.

Plus exactement, c'est à la frontière des traitements algébriques et numériques des noyaux  $N = Z$  que s'inscrit le travail de thèse ici présenté. Après avoir repris dans le premier chapitre les notions de symétrie en mécanique quantique et leur implémentation mathématique en termes de groupes, un schéma de classification algébrique des noyaux  $N = Z$  de masse  $A \approx 60$  sera construit puis testé vis-à-vis des états du modèle en couches et de la décroissance  $\beta$ . Sa réalisation partielle en termes de bosons sera ensuite examinée et permettra d'établir une connexion avec le modèle IBM-4. Dès lors, un certain nombre de phénomènes physiques spécifiques à la ligne  $N = Z$ , comme la condensation en structures de type  $\alpha$  ou la destruction des corrélations superfluides isoscalaires par le potentiel spin-orbite, seront mis en évidence analytiquement. Enfin, nous présenterons les premiers résultats numériques obtenus par diagonalisation complète d'un hamiltonien IBM-4 déduit d'une interaction résiduelle réaliste de manière à pouvoir estimer dans quelle mesure cette approximation peut constituer pour les noyaux plus lourds une alternative intéressante au modèle en couches.

## Références

- [Ari75] Arima A, Iachello F  
*Phys. Rev. Lett.* – 35/1069 (1975)
- [Civ97] Civitarese O, Reboiro M, Vogel P  
*Phys. Rev. C* – 56/1840 (1997)
- [Dea95] Dean D, Koonin S, Langanke K, Radha P, Alhassid Y  
*Phys. Rev. Lett* – 74/2909 (1995)
- [Dea97] Dean D, Koonin S, Langanke K, Radha P  
*Phys. Lett. B* – 399/1 (1997)
- [Dob98] Dobes J, Pittel S  
*Phys. Rev. C* – 57/688 (1998)



- [Ell58] Elliott J P  
*Proc. Roy. Soc. (London) A* – 245/128 et 245/562 (1958)
- [Ell80] Elliott J P, White A P  
*Phys. Lett. B* – 97/169 (1980)
- [Ell81] Elliott J P, Evans J A  
*Phys. Lett. B* – 101/216 (1981)
- [Ell96] Elliott J P, Evans J A, Lac V S, Long G L  
*Nucl. Phys. A* – 609/1 (1996)
- [Eng96] Engel J, Langanke K, Vogel P  
*Phys. Lett. B* – 389/211 (1996)
- [Flo64] Flowers B H, Szpikowski S  
*Proc. Phys. Soc.* – 84/673 (1964)
- [Gar99] Garcia-Ramos J E, Van Isacker P  
*Ann. Phys. (NY)* – 274/45 (1999)
- [Goo99] Goodman A L  
*Phys. Rev. C* – 60/014311 (1999)
- [Hal84] Halse P, Elliott J P, Evans J A  
*Nucl. Phys. A* – 417/301 (1984)
- [Hal85] Halse P  
*Nucl. Phys. A* – 445/93 (1985)
- [Han87] Han Q Z, Sun H Z, Li G H  
*Phys. Rev. C* – 35/786 (1987)
- [Lan96] Langanke K, Dean D, Radha P, Koonin S  
*Nucl. Phys. A* – 602/244 (1996)
- [Lan97] Langanke K, Dean D, Koonin S, Radha P  
*Nucl. Phys. A* – 613/253 (1997)
- [Ots99] Otsuka T, Mizusaki T, Honma M  
*J. Phys. G* – 25/699 (1999)
- [Pov98] Poves A, Martinez-Pinedo G  
*Phys. Lett. B* – 430/203 (1998)
- [Van97] Van Isacker P, Warner D D  
*Phys. Rev. Lett* – 78/3266 (1997)



## *Chapitre 1*

### **Approches algébriques en mécanique quantique**

Depuis l'avènement de la théorie quantique, l'utilisation des symétries dans la modélisation des systèmes physiques a connu un essor considérable. Initialement associé à l'existence de régularités dans la configuration spatiale des particules d'un système, le concept de symétrie s'est en fait progressivement généralisé à des degrés de liberté moins intuitifs. Cette évolution a ainsi permis d'appréhender des thèmes aussi diversifiés que l'unification des interactions fondamentales, le développement des mouvements collectifs dans les systèmes à N-corps ou les phénomènes critiques en physique statistique.

Dans ce chapitre, nous proposons de donner un sens précis aux transformations de symétrie d'un système quantique de manière à pouvoir construire leur réalisation mathématique dans l'espace des états. Les conséquences d'une structure de groupe seront ensuite examinées avec une attention particulière aux transformations continues et aux algèbres de Lie qui les engendrent. A titre d'exemple, les groupes unitaire et orthogonal, constamment utilisés par la suite, seront considérés. Dès lors, nous nous focaliserons sur la notion de symétrie dynamique essentiellement en raison de son pouvoir prédictif lorsqu'on ignore la forme précise des interactions comme c'est souvent le cas en physique subatomique. Basée sur la classification par inclusion des algèbres de Lie du système, cette symétrie sera finalement discutée par ses manifestations dans divers contextes allant de la physique des particules à la structure moléculaire.



## I - Définition et propriétés générales des opérateurs de symétrie d'un système physique

En mécanique quantique, effectuer une transformation  $G$  sur un système consiste à remplacer chacune de ses variables dynamiques  $A$  par une nouvelle  $A'$  et chacun de ses états  $|\Psi\rangle$  par un autre  $|\Psi'\rangle$ . Il y a alors invariance si une telle opération n'affecte en rien les propriétés physiques du système. En d'autres termes, les résultats de n'importe quelle observation avant et après transformation demeurent les mêmes ainsi que la loi d'évolution. Par conséquent :

i) Etant dans l'état  $|\Psi\rangle$  la probabilité de trouver des résultats de mesure correspondant à un ket  $|\Phi\rangle$  se doit d'être identique à la probabilité définie dans des termes analogues au niveau des vecteurs transformés :

$$|\langle\Psi|\Phi\rangle|^2 = |\langle\Psi'|\Phi'\rangle|^2 \quad (1.1)$$

ii) Si  $|\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$  alors  $|\Psi'(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi'(t_0)\rangle$ ,  $U(t, t_0)$  correspondant à l'opérateur d'évolution entre les dates  $t_0$  et  $t$ .

C'est précisément l'analyse de ces 2 conditions qui va contraindre la correspondance bijective entre les états de départ et ceux issus de l'action de l'opération de symétrie. En premier lieu, il est possible de montrer que la conservation en norme du produit scalaire représentée par la condition (1.1) oblige cette loi de correspondance à être :

■ linéaire et unitaire

$$(\lambda|\Psi\rangle + \mu|\Phi\rangle)' = \lambda|\Psi'\rangle + \mu|\Phi'\rangle \quad (1.2.a)$$

$$\langle\Psi'|\Phi'\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle \quad (1.2.b)$$

ou

■ antilinéaire et antiunitaire

$$(\lambda|\Psi\rangle + \mu|\Phi\rangle)' = \lambda^*|\Psi'\rangle + \mu^*|\Phi'\rangle \quad (1.3.a)$$

$$\langle\Psi'|\Phi'\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle^* \quad (1.3.b)$$

Cet important résultat constitue le théorème de Wigner [Wig59] et a été rigoureusement démontré par Bargmann selon un raisonnement repris dans la référence [Ster94-appendice D]. Dans les cas concrets, la solution linéaire est privilégiée par de nombreuses invariances : on peut citer les translations, rotations ou réflexions et plus généralement nous verrons dans le prochain paragraphe II-3 que toutes les transformations continues astreintes à vérifier les axiomes d'une structure de groupe de Lie ne peuvent être décrites de façon cohérente que par des lois linéaires. Dans tous ces cas, la relation  $|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi'\rangle$  permet d'introduire un opérateur linéaire  $G$  tel que  $G|\Psi\rangle = |\Psi'\rangle$  et satisfaisant par ailleurs aux propriétés habituelles avec en particulier un adjoint  $G^+$  défini par :

$$\langle\Phi|(G^+|\Psi\rangle) = [\langle\Psi|(G|\Phi\rangle)]^* \quad (1.4)$$

Bien que moins familière, la situation antilinéaire se trouve cependant réalisée dans les systèmes physiques comme par exemple dans l'étude du renversement du temps [Mes95-chapitre 15].



Son usage nécessite quelques précautions en particulier au niveau de l'opérateur adjoint pour lequel on est amené à poser :

$$\langle \Phi | (G^+ | \Psi) \rangle = \langle \Psi | (G | \Phi) \rangle \quad (1.5)$$

Par ailleurs, il est important de signaler que le comportement du produit scalaire sous la transformation, représenté par les équations (1.2.b) ou (1.3.b), se traduit dans les 2 cas par :

$$GG^+ = G^+G = I \quad (1.6)$$

Ayant établi la nature mathématique générale des opérateurs assurant la traduction des symétries au niveau des états du système, il est maintenant aisé de procéder à l'analyse du comportement des observables. Comme nous l'avons précisé au départ, l'hypothèse d'invariance implique l'insensibilité des résultats de mesure aux transformations effectuées. Au niveau des valeurs moyennes, on a donc :

$$\langle \Psi | A | \Psi \rangle = \langle \Psi' | A' | \Psi' \rangle \quad (1.7)$$

Mais, en posant  $|\chi\rangle = A'|\Psi'\rangle$ , il vient, compte tenu du caractère réel de la valeur moyenne :

$$\langle \Psi | A | \Psi \rangle = \langle \Psi' | \chi \rangle = \langle \chi | (G | \Psi) \rangle = \langle \Psi | (G^+ | \chi) \rangle = \langle \Psi | (G^+ A' G | \Psi) \rangle, \text{ pour tout } |\Psi\rangle$$

En d'autres termes,  $A = G^+ A' G$  et donc :

$$A' = G A G^+ \quad (1.8)$$

Il en résulte que toute relation entre observables du système est conservée par la transformation de symétrie si son opérateur associé est linéaire et remplacée par la relation complexe conjuguée lorsqu'il est antilinéaire. Finalement, le contenu physique de la loi de correspondance  $G$  est donc déterminé par la façon dont sont modifiées les variables dynamiques fondamentales  $\xi$  à partir desquelles toutes les autres grandeurs s'expriment. En d'autres termes, les relations  $\xi' = G \xi G^+$  caractérisent physiquement la transformation en mécanique quantique. Elles ne sont toutefois pas suffisantes pour déterminer complètement l'opérateur  $G$ . Supposons en effet qu'il existe un autre opérateur  $G_0$  vérifiant ces mêmes relations :

$$\xi' = G_0 \xi G_0^+ \quad (1.9)$$

Dès lors, comme  $\xi = G_0^+ \xi' G_0$ , il vient  $\xi = G_0^+ G \xi G^+ G_0$ , c'est-à-dire :

$$[G_0^+ G, \xi] = 0, \text{ quel que soit } \xi. \quad (1.10)$$

$G_0^+ G$  commute donc avec n'importe quelle fonction  $F(\xi)$  des observables fondamentales et ainsi avec toutes les variables dynamiques  $A$  du système. En choisissant un vecteur propre commun à un ensemble complet de variables  $A_n$  qui commutent, et donc labellé par les valeurs propres  $\lambda_n$  de ces observables, on aura :

$$A_n G_0^+ G |\{\lambda_n\}\rangle = G_0^+ G A_n |\{\lambda_n\}\rangle = \lambda_n G_0^+ G |\{\lambda_n\}\rangle, \text{ pour tout } n \quad (1.11)$$

Par suite  $G_0^+ G |\{\lambda_n\}\rangle$  est nécessairement proportionnel à  $|\{\lambda_n\}\rangle$  :

$$G_0^+ G |\{\lambda_n\}\rangle = \kappa |\{\lambda_n\}\rangle, \text{ si bien que } G_0^+ G F(\xi) |\{\lambda_n\}\rangle = \kappa F(\xi) |\{\lambda_n\}\rangle \text{ quelle que soit } F(\xi).$$



A ce moment-là, si l'on admet que l'espace des états d'un système est irréductible par rapport à ses observables fondamentales  $\xi$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sous-espace stable par action des opérateurs  $\xi$ , l'ensemble des kets  $F(\xi) \{|\lambda_n\rangle\}$  se doit d'être identifié à l'espace tout entier (cet ensemble est en effet manifestement invariant par rapport aux  $\xi$ ). Ainsi :

$$G_0^+ G = \text{Constante } \kappa \quad (1.12)$$

Dès lors,  $G_0^+ G (G_0^+ G)^+ = G_0^+ G G^+ G_0 = 1 = |\kappa|^2$ , ce qui prouve que  $\kappa$  est un simple facteur de phase  $e^{i\alpha}$  et donc que  $G = e^{i\alpha} G_0$ . Finalement, nous venons de mettre en évidence que l'opérateur  $G$  représentant une transformation de symétrie au niveau des états quantiques d'un système, n'est défini qu'à un terme de phase  $e^{i\alpha}$  près.

Il reste maintenant à aborder le problème des symétries sous l'angle de l'évolution du système au cours du temps. Dans ce contexte et comme mentionné dès le départ dans le point ii), postuler l'invariance sous l'action d'une opération  $G$  entraîne que les vecteurs transformés doivent se modifier dynamiquement de la même manière que les états non transformés, soit :

$$\begin{cases} |\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle \\ |\Psi'(t)\rangle = U(t, t_0) |\Psi'(t_0)\rangle \end{cases}, \quad U(t, t_0) \text{ étant l'opérateur d'évolution entre les instants } t_0 \text{ et } t.$$

Ainsi  $G |\Psi(t)\rangle = U(t, t_0) G |\Psi(t_0)\rangle$  et donc  $|\Psi(t)\rangle = G^+ U(t, t_0) G |\Psi(t_0)\rangle$  quel que soit le vecteur  $|\Psi\rangle$ . En conséquence, à un facteur de phase près qui peut être pris égal à 1 pour la plupart des symétries envisagées en physique [Mes95-page 564] :

$$G^+ U(t, t_0) G = U(t, t_0). \quad (1.13)$$

Or, pour une évolution sur une durée infinitésimale  $dt$ , on a  $U(t_0 + dt, t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar} H(t_0) dt$  avec  $H$  l'hamiltonien du système, si bien que  $G^+ H(t_0) G = H(t_0)$  ou encore :

$$[H(t_0), G] = 0 \text{ pour tout } t_0 \quad (1.14)$$

Ainsi, toute symétrie imposée à la dynamique d'un système physique se traduit par la commutativité de son hamiltonien avec l'opérateur unitaire ou antiunitaire représentant la transformation mise en jeu. A titre d'exemple, on peut citer l'invariance de la loi d'évolution d'un système isolé par rapport au groupe des déplacements galiléens ou lorentziens (translations d'espace, de temps, rotations et changement de référentiels) ou encore l'invariance par réflexion, mais qui est seulement approximative à cause de la brisure engendrée par les interactions faibles.

#### En conclusion :

A chaque opération de symétrie  $G$  est associé un opérateur unitaire ou antiunitaire  $G$  défini à un facteur de phase près et qui commute avec l'hamiltonien du système.



---

## II - Spécificités inhérentes à l'existence d'une loi de groupe

---

### ① Postulats de définition d'un groupe

Un ensemble de transformations  $\{G_a\}$  forme un groupe s'il est possible de définir en son sein une loi de multiplication vérifiant les 4 propriétés suivantes :

i) Le produit de 2 éléments de l'ensemble appartient toujours à l'ensemble :

$$G_a G_b = G_{f(a,b)} \quad (1.15.a)$$

ii) La multiplication est associative :

$$(G_a G_b) G_c = G_a (G_b G_c), \text{ ou encore } f[f(a,b),c] = f[a,f(b,c)] \quad (1.15.b)$$

iii) Il existe dans l'ensemble un élément neutre  $G_0$  tel que :

$$G_a G_0 = G_0 G_a = G_a, \text{ soit } f(a,0) = f(0,a) = a \quad (1.15.c)$$

iv) Pour chaque élément  $G_a$ , il existe un inverse  $G_{a^{-1}}$  vérifiant :

$$G_a G_{a^{-1}} = G_{a^{-1}} G_a = G_0, \text{ c'est-à-dire } f(a,a^{-1}) = f(a^{-1},a) = 0 \quad (1.15.d)$$

Outre sa richesse mathématique, la structure de groupe revêt un intérêt physique en raison de son omniprésence dans les invariances exhibées par les différents systèmes qui nous entourent : les permutations de particules identiques forment par exemple un groupe, tout comme les translations, les rotations ou les changements de référentiel. C'est aussi le cas des opérations géométriques qui consistent en un simple échange d'atomes identiques dans une molécule ou un cristal. Pour de telles situations, il a d'ailleurs pu être démontré que seuls 32 groupes de symétrie, qualifiés de ponctuels, étaient susceptibles d'apparaître [Ham62-chapitre 2].

Sur le plan terminologique, on distingue habituellement les groupes discrets, caractérisés par un nombre fini dénombrable d'éléments, des groupes continus pour lesquels l'indice  $a$  correspond à un ou plusieurs paramètres réels  $a_p$  pouvant prendre n'importe quelle valeur à l'intérieur d'un certain domaine : il s'agit par exemple des 3 coordonnées du vecteur déplacement pour une translation ou de l'angle caractérisant une rotation plane. Dans le cas où l'intervalle de variation des paramètres serait fini, on qualifie par ailleurs le groupe de compact. Enfin, dans la majorité des applications physiques, les groupes continus mis en jeu jouissent de propriétés analytiques qui permettent d'effectuer du calcul différentiel sur leurs éléments : on parle alors de groupes de Lie [Gil74-chapitre 4] et à titre d'exemple, nous en donnons ci-après une liste non exhaustive. Dans tous les cas considérés, les transformations agissent linéairement sur des vecteurs réels ou complexes à  $N$  dimensions  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n, \dots, x_N)$  et sont donc représentées par des matrices  $M$  carrées de type  $N \times N$ . A noter que ces matrices sont nécessairement inversibles pour satisfaire à l'axiome (1.15.d) de la définition d'un groupe.



### ■ Groupe linéaire

Aucune autre restriction n'est imposée aux matrices  $M$  caractérisées chacune par  $N^2$  éléments. Dans le cas réel, on définit ainsi le groupe  $GL(N)$  à  $N^2$  paramètres et pour le cas complexe le groupe  $GL(N, C)$  à  $2N^2$  paramètres.

### ■ Groupe spécial linéaire

Seules les matrices de déterminant égal à 1 sont prises en compte et conduisent aux groupes  $SL(N)$  (réel,  $N^2 - 1$  paramètres) ou  $SL(N, C)$  (complexe,  $2N^2 - 2$  paramètres).

### ■ Groupe unitaire

On convient de ne retenir que les transformations qui préservent la norme hermitienne  $\sum_n |x_n|^2$  des vecteurs  $\vec{x}$  auxquels elles sont appliquées. Il en résulte que  $MM^\dagger = M^\dagger M = I$ , entraînant  $\sum_{n_1} |M_{n_1 n_2}|^2 = I$  et donc  $|M_{n_1 n_2}| \leq I$ . Le groupe compact à  $N^2$  paramètres ainsi obtenu est noté  $U(N)$  et joue un rôle primordial dans la description algébrique des systèmes de particules identiques comme nous aurons prochainement l'occasion de le constater (cf. II-3). Par ailleurs, ce groupe possède des extensions non-compactes, désignées par  $U(p, q)$  avec  $p + q = N$  et définies par les matrices  $M$  qui laissent invariante la forme  $\sum_{n=1}^p |x_n|^2 - \sum_{n=p+1}^N |x_n|^2$ .

### ■ Groupe spécial unitaire

Il s'agit du groupe obtenu en sélectionnant les transformations de  $U(N)$  dont le déterminant est égal à 1. On le note  $SU(N)$  et chacun de ses éléments est donc caractérisé par  $N^2 - 1$  paramètres.  $SU(p, q)$  est défini de manière analogue. Sur le plan physique, le groupe  $SU(3)$  s'est particulièrement illustré en physique des particules (cf. IV-1) ainsi qu'en structure nucléaire où il donne alors un fondement microscopique aux bandes rotationnelles observées expérimentalement [El158, Tal93-chapitre 30].

### ■ Groupe spécial orthogonal

On y trouve toutes les matrices  $M$  de déterminant +1 et qui vérifient  $MM' = M'M = I$  de manière à conserver la forme quadratique  $\sum_{n=1}^N x_n^2$ . Le groupe compact ainsi défini possède dans le cas réel  $N(N-1)/2$  paramètres et se nomme  $SO(N)$ . Comme pour le cas unitaire, une version non-compacte  $SO(p, q)$  ( $p + q = N$ ) peut être introduite en exigeant que l'invariant soit  $\sum_{n=1}^p x_n^2 - \sum_{n=p+1}^N x_n^2$ . Notons que des extensions complexes  $SO(N, C)$  et  $SO(p, q, C)$  existent également. De façon générale, ces groupes orthogonaux sont fondamentaux en physique : par exemple, les rotations ou les transformations de Lorentz, dont on sait qu'elles laissent invariante l'évolution de tout système isolé, forment respectivement les groupes  $SO(3)$  et  $SO(3, 1)$ .



## ■ Groupe symplectique

Il est uniquement défini dans des espaces de dimension paire  $N = 2p$  et rassemble toutes les transformations qui laissent inchangée la forme bilinéaire  $\sum_{n=1}^p (x_n y_{n+p} - x_{n+p} y_n)$  définie par 2 vecteurs  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_N)$  et  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_p, y_{p+1}, \dots, y_N)$ . On le note  $Sp(N)$  dans le cas réel où il possède  $N(N+1)$  paramètres et  $Sp(N, \mathbb{C})$  dans le cas complexe. Ses applications physiques se situent essentiellement au niveau de la structure des atomes et des noyaux pour la définition du nombre quantique de séniorité [Tal93-chapitre 25]

## ② Représentation de la structure de groupe en théorie quantique

Conformément à l'étude que nous avons menée au paragraphe I, chacune des transformations  $G_a$  du groupe est représentée dans l'espace des états du système par un opérateur  $G_a$  défini à un facteur de phase près. Cette indétermination entraîne que toute égalité entre les éléments du groupe ne se transpose au niveau des opérateurs associés qu'à une exponentielle imaginaire  $e^{i\varphi}$  près. En particulier, l'équation (1.15.a) liée à l'hypothèse d'une multiplication interne va devenir :

$$G_a G_b = e^{i\varphi(a,b)} G_{f(a,b)} \quad (1.16)$$

On parle alors de représentation projective du groupe dans l'espace des états. Dans certains cas, il est cependant envisageable qu'un choix judicieux des phases de chacun des opérateurs  $G_a$  puisse permettre d'éviter le facteur  $e^{i\varphi(a,b)}$ . Dans ce cas,  $G_a G_b = G_{f(a,b)}$  et on retrouve ainsi exactement la structure de groupe pour les traductions quantiques des opérations de symétrie. Dès lors, on aura nécessairement  $G_a G_0 = G_a$ , c'est-à-dire  $G_0 = I$  en raison de  $G_a^+ G_a = I$  [équation (1.6)]. De même,  $G_a G_{a^{-1}} = G_0 = I$  et ainsi  $G_{a^{-1}} = G_a^+$ . En résumé, ces représentations non projectives, sont donc caractérisées par les relations suivantes :

$$G_a G_b = G_{f(a,b)} \quad (1.17.a)$$

$$G_a G_a^+ = G_a^+ G_a = I \quad (1.17.b)$$

$$G_0 = I \quad (1.17.c)$$

$$G_{a^{-1}} = G_a^+ \quad (1.17.d)$$

Concernant les groupes discrets, la possibilité d'utiliser des opérateurs  $G_a$  isomorphes aux transformations géométriques considérées n'est pas systématique : c'est effectivement le cas pour les permutations, mais par exemple certains groupes ponctuels admettent des représentations qui ne peuvent être rendues non projectives [Ham62-chapitre 12]. Dans le cas continu, on peut démontrer que l'élimination du facteur de phase dans (1.9) est toujours possible lorsque les 2 critères mathématiques suivants sont simultanément vérifiés [Wei95-chapitre 2] :

➤ Le groupe est semi-simple, c'est-à-dire qu'il ne possède aucun sous-groupe invariant et abélien (en notant  $H$  un tel sous groupe, on a  $G_a H G_{a^{-1}} = H$  pour tout élément  $G_a$  du groupe et  $\forall \mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b \in H, \mathcal{H}_a \mathcal{H}_b = \mathcal{H}_b \mathcal{H}_a$ ). En réalité, cette propriété, partagée par de nombreux groupes tels  $SU(N)$ ,  $SO(N)$ ,  $Sp(N)$ , garantit la possibilité de vérifier la loi de multiplication (1.17.a) pour les transformations du voisinage de l'identité. Néanmoins, quelques algèbres aux



conséquences importantes, comme celle du groupe  $U(N)$  ou celle des transformations galiléennes, ne jouissent pas du caractère semi-simple et doivent par conséquent faire l'objet d'études spécifiques : par exemple, grâce à un algorithme présenté dans la référence [Wei95-chapitre2], la structure précise de l'algèbre unitaire (cf. II-3) permet quand même d'éviter l'usage d'une représentation projective pour les opérations infinitésimales.

➤ Le groupe est simplement connexe : en d'autres termes, tout chemin fermé dans l'espace des paramètres peut être continûment déformé pour finalement se contracter en un point. Lorsque cette condition n'est pas remplie, il est tout de même possible d'utiliser une représentation  $G_a$  non projective mais à condition de travailler avec un groupe élargi aux mêmes implications physiques, appelé groupe de recouvrement. Celui-ci coïncide en fait avec le groupe de départ au niveau des transformations infiniment proches de l'élément neutre, mais se distingue par la suite en permettant de composer ces opérations élémentaires de manière à assurer l'isomorphisme (1.17.a). En physique, une telle situation se produit par exemple pour le groupe orthogonal  $SO(N)$  où l'on donne alors le nom de  $Spin(N)$  au groupe de recouvrement. A 3 dimensions, ce groupe est d'ailleurs bien connu puisqu'il est isomorphe à  $SU(2)$  [Gil74-chapitre 4].

Pour conclure, compte tenu du rôle prépondérant joué par les représentations non-projectives, nous nous limiterons dans la suite à ces représentations et considérerons donc qu'à chaque transformation  $G_a$  d'un groupe est associé un unique opérateur  $G_a$  vérifiant les propriétés (1.17.a-d).

### ③ Compléments à propos des groupes continus

Commençons par rappeler que pour les opérations  $G_a$  d'un groupe continu, l'indice  $a$  désigne un ou plusieurs paramètres réels  $a_p$  et que dans le cas d'un groupe de Lie, ces transformations sont assujetties à vérifier un certain nombre de critères analytiques qui autorisent en particulier leur dérivation à n'importe quel ordre par rapport aux  $a_p$ . Nous admettrons qu'il en est de même pour les opérateurs  $G_a$  d'une représentation dans l'espace des états. Dès lors, ces opérateurs sont continus vis-à-vis de leurs variables  $a_p$  et ainsi l'image  $G_{da}$  d'une transformation infiniment proche de l'élément neutre doit obligatoirement tendre vers l'opérateur linéaire et unitaire  $G_0 = I$  [équation (1.17.b)].  $G_{da}$  est donc lui aussi linéaire et unitaire et plus généralement l'intégralité de la représentation  $G_a$ , qui peut toujours s'obtenir en composant des transformations infinitésimales compte tenu de la loi de groupe (1.17.a), vérifie cette même propriété. Nous arrivons ainsi au résultat annoncé au paragraphe I, à savoir que tous les opérateurs  $G_a$  associés aux éléments d'un groupe de Lie sont linéaires et unitaires.

Revenons maintenant aux opérateurs infinitésimaux  $G_{da}$ . En utilisant un développement limité au premier ordre, on peut toujours écrire :

$$G_{da} = I - i \sum_p da_p g_p \quad (1.18)$$

où les opérateurs  $g_p$  représentent, au facteur  $i$  près, les dérivées en 0 de  $G_a$  par rapport à chaque paramètre réel  $a_p$  et jouent un rôle prééminent dans l'analyse mathématique des représentations quantiques des transformations continues. En particulier, par multiplication d'opérations infinitésimales, ils permettent d'exprimer n'importe quel élément  $G_a$  associé à une transformation finie et pour cette raison, portent le nom de générateurs. Par exemple, pour un



groupe à un paramètre  $a$  possédant en plus une loi de composition caractérisée par une simple addition de ce paramètre, soit  $G_a G_b = G_{a+b}$  et donc  $G_a G_b = G_{a+b}$ , on a :

$$G_{a+da} = G_a G_{da}, \text{ c'est-à-dire en notant } g \text{ l'unique générateur } \frac{dG_a}{da} = -igG_a$$

$$\Rightarrow G_a = \text{Exp}(-iag) \quad (1.19)$$

Cette argumentation s'applique en particulier aux translations dans une direction donnée ou aux rotations autour d'un axe fixe : dans ces cas, les générateurs sont d'ailleurs bien connus puisqu'il s'agit respectivement, à la constante de Planck près, de la composante de l'impulsion et du moment cinétique selon la direction considérée.

Sur le plan mathématique, les générateurs sont linéairement indépendants. En effet si  $\sum_p \lambda_p g_p = 0$ , la transformation de paramètres  $da_p = \lambda_p d\lambda$ , où  $d\lambda$  est un infiniment petit du premier ordre, s'écrit  $G_{da} = 1 - i \sum_p \lambda_p d\lambda g_p = 1$  et s'identifie donc à  $G_0$ . Par suite  $da_p = 0$  et par conséquent  $\lambda_p = 0$  pour tout  $p$  prouvant ainsi le résultat annoncé. Par ailleurs, les générateurs sont hermitiques à cause de l'unitarité (1.17.b) de la représentation :

$$G_{da}^+ G_{da} = 1 = 1 - i \sum_p da_p (g_p - g_p^+) + \text{Termes en } da^2 \text{ pour tout } da = \{da_1, \dots, da_p, \dots\} \quad (1.20)$$

Enfin, ils commutent avec l'hamiltonien compte tenu de l'invariance (1.14) de la loi d'évolution du système sous l'action des éléments du groupe de symétrie et à ce titre ils constituent donc des observables conservées au cours du mouvement quantique.

#### En résumé :

Toute transformation de symétrie  $G_a$  d'un groupe de Lie est représentée dans l'espace des états par un opérateur linéaire et unitaire  $G_a$  obtenu à l'aide d'un ensemble d'observables  $g_p$  associées chacune à un paramètre  $a_p$  du groupe, conservées au cours de l'évolution et que l'on nomme générateurs.

Nous allons maintenant prouver que la loi de composition  $G_a G_b = G_{f(a,b)}$  des opérations du groupe fixe en réalité l'algèbre de commutation des générateurs  $g_p$ . Tout d'abord, en utilisant (1.18), il vient :

$$[G_{da}, G_{db}] = - \sum_{p_1, p_2} da_{p_1} db_{p_2} [g_{p_1}, g_{p_2}] \quad (1.21)$$

Or  $G_{da} G_{db} = G_{f(da, db)} = 1 - i \sum_{p_3} f_{p_3}(da, db) g_{p_3}$  avec au premier ordre en  $db$  :

$$f_{p_3}(da, db) = \underbrace{f_{p_3}(da, 0)}_{da_{p_3} \text{ (equation 1.15.c)}} + \sum_{p_2} db_{p_2} \left( \frac{\partial f_{p_3}(da, b)}{\partial b_{p_2}} \right)_{b=0} \quad (1.22)$$



En exprimant de la manière similaire  $f_{\rho_3}(da, b)$ , on a finalement :

$$f_{\rho_3}(da, db) = da_{\rho_3} + \sum_{\rho_2} db_{\rho_2} \left[ \delta_{\rho_2 \rho_3} + \sum_{\rho_1} da_{\rho_1} \left( \frac{\partial^2 f_{\rho_3}(a, b)}{\partial a_{\rho_1} \partial b_{\rho_2}} \right)_{a=0, b=0} \right] \quad (1.23)$$

et donc  $G_{da} G_{db} = 1 - i \sum_{\rho_3} \left[ da_{\rho_3} + db_{\rho_3} + \sum_{\rho_1, \rho_2} da_{\rho_1} db_{\rho_2} \left( \frac{\partial^2 f_{\rho_3}(a, b)}{\partial a_{\rho_1} \partial b_{\rho_2}} \right)_{a=0, b=0} \right] g_{\rho_3}$ .

Par un raisonnement analogue, il est aisé de calculer  $G_{db} G_{da}$  et ainsi d'en déduire le commutateur  $[G_{da}, G_{db}]$  :

$$[G_{da}, G_{db}] = -i \sum_{\rho_1, \rho_2, \rho_3} da_{\rho_1} db_{\rho_2} \left[ \left( \frac{\partial^2 f_{\rho_3}(a, b)}{\partial a_{\rho_1} \partial b_{\rho_2}} \right) - \left( \frac{\partial^2 f_{\rho_3}(a, b)}{\partial a_{\rho_2} \partial b_{\rho_1}} \right) \right]_{a=0, b=0} g_{\rho_3} \quad (1.24)$$

En comparant cette égalité avec (1.21), il vient immédiatement :

$$[g_{\rho_1}, g_{\rho_2}] = \sum_{\rho_3} C_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3} g_{\rho_3} \text{ avec } C_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3} = i \left[ \left( \frac{\partial^2 f_{\rho_3}(a, b)}{\partial a_{\rho_1} \partial b_{\rho_2}} \right) - \left( \frac{\partial^2 f_{\rho_3}(a, b)}{\partial a_{\rho_2} \partial b_{\rho_1}} \right) \right]_{a=0, b=0} \quad (1.25)$$

Le commutateur de 2 générateurs apparaît donc comme étant une combinaison linéaire de ces mêmes générateurs : on exprime cette propriété remarquable en qualifiant l'ensemble des  $g_\rho$  d'algèbre de Lie [Gil74-chapitre 4]. Les coefficients  $C_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3}$  de la combinaison linéaire sont eux appelés constantes de structure du groupe et comme annoncé au départ, ils ne dépendent que de la loi de multiplication des transformations. On peut donc les évaluer dans n'importe quel espace de Hilbert : habituellement c'est à l'intérieur d'un espace de fonctions  $f(\vec{x})$  définies sur les vecteurs  $\vec{x}$  auxquels les transformations géométriques du groupe s'appliquent, que leur dérivation est effectuée. Ces constantes vérifient en plus un certain nombre de relations qu'il est aisé d'obtenir en combinant les propriétés des commutateurs avec l'indépendance linéaire des générateurs :

#### ■ Antisymétrie

$$C_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3} + C_{\rho_2 \rho_1}^{\rho_3} = 0 \quad \left( \text{résulte de } [g_{\rho_1}, g_{\rho_2}] + [g_{\rho_2}, g_{\rho_1}] = 0 \right) \quad (1.26)$$

#### ■ Identité de Jacobi

$$\sum_{\rho_4, \rho_5} (C_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_4} C_{\rho_4 \rho_3}^{\rho_5} + C_{\rho_3 \rho_1}^{\rho_4} C_{\rho_4 \rho_2}^{\rho_5} + C_{\rho_2 \rho_3}^{\rho_4} C_{\rho_4 \rho_1}^{\rho_5}) = 0 \quad (1.27)$$

$$\left( \text{résulte de } [[g_{\rho_1}, g_{\rho_2}], g_{\rho_3}] + [[g_{\rho_3}, g_{\rho_1}], g_{\rho_2}] + [[g_{\rho_2}, g_{\rho_3}], g_{\rho_1}] = 0 \right)$$

Sur le plan mathématique, la structure d'algèbre de Lie représentée par les relations (1.25-27) s'avère très riche et a été étudiée systématiquement par Cartan qui a ainsi pu en établir une classification [Gil74-chapitres 7 et 8]. Physiquement, elle joue un rôle essentiel en permettant par exemple d'apporter de précieux renseignements sur la nature de l'hamiltonien. Comme nous l'avons vu, celui-ci est en effet astreint à commuter avec les générateurs afin de



rester insensible à n'importe quelle transformation du groupe de symétrie. Or, pour tous les groupes semi-simples (cf. II-2), il est possible de prouver qu'il existe toujours une ou plusieurs observables invariantes  $C_p$  s'exprimant uniquement à l'aide des générateurs [Gil74-chapitre 7]. Ces observables sont appelées opérateurs de Casimir et leur nombre constitue le rang de l'algèbre. Elles s'écrivent par ailleurs de façon générale sous la forme

$$C_p = \sum_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p} \lambda_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p} g_{\rho_1} g_{\rho_2} \dots g_{\rho_p}, \text{ où les coefficients } \lambda_{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_p} \text{ sont fonction des constantes de}$$

structure de manière à assurer  $[C_p, g_\rho] = 0$ . Par exemple, pour l'invariant  $C_2$  quadratique vis-à-vis des générateurs, on a [Gil74-chapitre 10] :

$$C_2 = \sum_{\rho_1 \rho_2} (m^{-1})_{\rho_1 \rho_2} g_{\rho_1} g_{\rho_2} \quad (1.28)$$

$m^{-1}$  étant l'inverse de la matrice  $m$  d'éléments  $m_{\rho_1 \rho_2} = \sum_{\rho_3 \rho_4} C_{\rho_1 \rho_4}^{\rho_3} C_{\rho_2 \rho_3}^{\rho_4}$ , inverse dont l'existence est assuré à cause du caractère semi-simple. Dès lors, une combinaison quelconque de ces opérateurs de Casimir pourra être un candidat à l'hamiltonien du système.

#### En résumé :

La loi de multiplication interne des transformations d'un groupe continu confère à l'ensemble de ses générateurs  $g_\rho$  une stabilité par commutation :

$$[g_{\rho_1}, g_{\rho_2}] = \sum_{\rho_3} C_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3} g_{\rho_3} \quad (1.29)$$

Pour de nombreux groupes, la structure d'algèbre de Lie qui en résulte autorise alors une expansion de l'hamiltonien en fonction des générateurs, soit :

$$H = H(C_1, C_2, \dots, C_p, \dots) \quad (1.30)$$

où les opérateurs de Casimir  $C_p$  sont des combinaisons linéaires de produits de  $p$  générateurs et sont uniquement déterminés par les constantes de structure  $C_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3}$ .

#### Remarque :

En l'absence de toute information autre que l'invariance, l'hamiltonien sera généralement choisi sous sa forme la plus simple, c'est-à-dire comme une combinaison linéaire des opérateurs de Casimir :

$$H = E_0 + E_1 C_1 + E_2 C_2 + \dots \quad (1.31)$$

Pour conclure, nous proposons d'illustrer l'ensemble des notions qui viennent d'être exposées dans le cas des transformations unitaires et orthogonales à  $N$  dimensions auxquelles nous serons constamment confrontés par la suite.

#### ■ Algèbre du groupe $U(N)$

Comme nous l'avons précisé au paragraphe II-1, les opérations envisagées sont représentées par des matrices  $M$  du type  $N \times N$  vérifiant  $MM^+ = M^+M = I$ . Elles transforment tout vecteur complexe  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n, \dots, x_N)$  en un autre  $\vec{x}' = (x'_1, \dots, x'_n, \dots, x'_N)$  et peuvent par



ailleurs se mettre sous la forme  $M = \text{Exp}(-iZ)$  avec  $Z$  hermitique. En multipliant l'une quelconque de ces matrices  $Z$  par un infiniment petit  $d\lambda$ , nous définissons alors une transformation élémentaire  $M = I - i d\lambda Z$  sous laquelle toute fonction  $f(\bar{x})$  va être modifiée en

$$f(\bar{x}') = f(\bar{x}) - i d\lambda \sum_{n_1, n_2} Z_{n_2 n_1} g_{n_1 n_2} f(\bar{x}) \quad (1.32)$$

où  $g_{n_1 n_2}$  désigne l'opérateur différentiel défini par  $g_{n_1 n_2} f(\bar{x}) = x_{n_1} \frac{\partial f}{\partial x_{n_2}}(\bar{x})$ .

Si par ailleurs, les parties réelle  $X_{n_1 n_2}$  et imaginaire  $Y_{n_1 n_2}$  de chaque élément de matrice  $Z_{n_1 n_2}$  sont introduites, il est aisé de mettre la relation précédente (1.32) sous la forme suivante :

$$f(\bar{x}') = f(\bar{x}) - i d\lambda \sum_n X_{nn} g_{nn} f(\bar{x}) - i d\lambda \sum_{n_1 < n_2} X_{n_1 n_2} (g_{n_1 n_2} + g_{n_2 n_1}) f(\bar{x}) + \dots \\ d\lambda \sum_{n_1 < n_2} Y_{n_1 n_2} (g_{n_1 n_2} - g_{n_2 n_1}) f(\bar{x}) \quad (1.33)$$

où n'interviennent alors que les  $N^2$  paramètres réels et indépendants dont dépend la transformation infinitésimale  $M$  considérée. En comparant avec la relation (1.18), il apparaît donc que les générateurs de  $U(N)$  dans l'espace des fonctions  $f(\bar{x})$  sont donnés par :

$$\begin{cases} A_{nn} = g_{nn} \\ B_{n_1 n_2} = g_{n_1 n_2} + g_{n_2 n_1} \\ C_{n_1 n_2} = i (g_{n_1 n_2} - g_{n_2 n_1}) \end{cases}, \quad \begin{matrix} n, n_1, n_2 = 1 \rightarrow N \\ n_1 < n_2 \end{matrix} \quad (1.34)$$

Ils s'expriment donc en fonction de l'ensemble des opérateurs non hermitiques  $g_{n_1 n_2}$  ( $g_{n_1 n_2}^+ = g_{n_2 n_1}$ ) qui sont par ailleurs stables par commutation. En effet comme  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_{n_1}}, x_{n_2} \right] = \delta_{n_1 n_2}$ , il est immédiat de constater que :

$$[g_{n_1 n_2}, g_{n_3 n_4}] = g_{n_1 n_4} \delta_{n_2 n_3} - g_{n_3 n_2} \delta_{n_1 n_4} \quad (1.35)$$

Les commutateurs entre les générateurs (1.34) et les constantes de structure de l'algèbre unitaire qui en résultent se déduisent alors facilement de cette relation.

Finalement, dans un espace de Hilbert quelconque, postuler l'invariance du système sous les transformations d'un groupe  $U(N)$  conduit nécessairement à l'existence dans l'espace des états de  $N^2$  générateurs  $A_{nn}, B_{n_1 n_2}, C_{n_1 n_2}$  ( $n, n_1, n_2 = 1 \rightarrow N, n_1 < n_2$ ) ayant des relations de commutation spécifiques déterminées par les constantes de structure. A partir de ces observables, on pourra alors définir par les équations (1.21) des opérateurs  $g_{n_1 n_2}$  ( $n_1, n_2 = 1 \rightarrow N$ ) vérifiant  $g_{n_1 n_2}^+ = g_{n_2 n_1}$  ainsi que (1.35). Réciproquement, tout ensemble d'opérateurs bi-indicés  $g_{n_1 n_2}$  ( $n_1, n_2 = 1 \rightarrow N$ ) pour lesquelles les 2 conditions précédentes sont valables, peut engendrer une algèbre unitaire  $U(N)$  grâce à la définition de générateurs donnés par (1.34) et il y aura à ce moment là invariance si l'hamiltonien commute avec chacun des  $g_{n_1 n_2}$ . Une telle situation se rencontre en fait couramment en mécanique quantique dans la description



en seconde quantification des systèmes de fermions  $a_n^+$  ou de bosons  $b_n^+$ , l'indice  $n = 1 \rightarrow N$  permettant de repérer les états individuels. Pour le mettre en évidence, rappelons tout d'abord que le cas fermionique se caractérise par une algèbre anticommutative des opérateurs de création et d'annihilation, c'est-à-dire :

$$\{a_{n_1}^+, a_{n_2}^+\} = 0, \{a_{n_1}, a_{n_2}\} = 0, \{a_{n_1}, a_{n_2}^+\} = \delta_{n_1 n_2} \quad (1.36)$$

et le cas bosonique par une algèbre commutative de ces mêmes opérateurs, soit :

$$[b_{n_1}^+, b_{n_2}^+] = 0, [b_{n_1}, b_{n_2}] = 0, [b_{n_1}, b_{n_2}^+] = \delta_{n_1 n_2}. \quad (1.37)$$

En adoptant la même notation  $(c^+, c)$  pour  $(a^+, a)$  ou  $(b^+, b)$ , on montre alors sans difficulté que les quantités  $g_{n_1 n_2} = c_{n_1}^+ c_{n_2}$  vérifient toutes les conditions requises pour engendrer un groupe  $U(N)$ . En effet  $g_{n_1 n_2}^+ = c_{n_2}^+ c_{n_1} = g_{n_2 n_1}$  et  $[g_{n_1 n_2}, g_{n_3 n_4}] = [c_{n_1}^+ c_{n_2}, c_{n_3}^+ c_{n_4}] = c_{n_3}^+ [c_{n_1}^+ c_{n_2}, c_{n_4}] + c_{n_4} [c_{n_1}^+ c_{n_2}, c_{n_3}^+]$  avec par exemple pour un ensemble de fermions :

$$[c_{n_1}^+ c_{n_2}, c_{n_3}^+] = c_{n_1}^+ \{c_{n_2}, c_{n_3}^+\} - \{c_{n_1}^+, c_{n_3}^+\} c_{n_2} = c_{n_1}^+ \delta_{n_2 n_3} \text{ et } [c_{n_1}^+ c_{n_2}, c_{n_4}] = -c_{n_2} \delta_{n_1 n_4} \quad (1.38)$$

La relation (1.35) en découle aussitôt.

Toute cette discussion met ainsi en lumière que les ingrédients fondamentaux du groupe unitaire sont les opérateurs  $g_{n_1 n_2}$ . Précisons enfin que, même s'il n'est pas semi-simple, le groupe  $U(N)$  admet néanmoins  $N$  opérateurs de Casimir donnés précisément par les relations suivantes [Fra94-appendice B] :

$$C_p[U(N)] = \sum_{n_1 n_2 n_3 \dots n_p} g_{n_1 n_2} g_{n_2 n_3} \dots g_{n_{p-1} n_p} g_{n_p n_1} \text{ où } p = 1 \rightarrow N \quad (1.39)$$

A titre d'exemple, l'invariant linéaire de Casimir  $C_1$  dans l'espace de Fock de la seconde quantification s'identifie à l'opérateur nombre de particules  $\hat{\mathcal{N}}$  :

$$C_1[U(N)] = \sum_n g_{nn} = \sum_n c_n^+ c_n = \hat{\mathcal{N}} \quad (1.40)$$

Plus généralement, l'opérateur  $C_p$  contient des contributions à  $p$ -corps et c'est pourquoi dans la suite nous nous limiterons aux invariants d'ordre 2 au maximum.

### ■ Algèbre du groupe $SU(N)$

Dans ce cas, l'analyse est similaire à celle qui vient d'être menée au niveau des transformations unitaires si ce n'est que les matrices  $M$  considérées sont en plus caractérisées par un déterminant égal à 1. Au niveau d'une opération infinitésimale  $M = 1 - i d\lambda Z$ , on doit donc avoir  $\det(M) = 1 - i d\lambda \text{Tr}(Z) = 1$ , soit  $\text{Tr}(Z) = 0$ . Par conséquent, n'importe lequel des éléments diagonaux de la matrice  $Z$  peut s'exprimer en fonction des autres. En considérant par exemple le premier d'entre eux, un raisonnement identique au précédent permet de mettre facilement en évidence que les générateurs de  $SU(N)$  sont donnés par :

$$g_{nn} - g_{11} \ (n = 2 \rightarrow N), \ g_{n_1 n_2} + g_{n_2 n_1} \text{ et } i (g_{n_1 n_2} - g_{n_2 n_1}) \ (n_1, n_2 = 1 \rightarrow N, \ n_1 < n_2) \quad (1.41)$$



On peut alors introduire les  $N^2$  opérateurs  $\tilde{g}_{n_1 n_2} = g_{n_1 n_2} - \frac{\delta_{n_1 n_2}}{N} \sum_n g_{nn}$  ( $n_1, n_2 = 1 \rightarrow N$ ) pour lesquels il est immédiat de vérifier que:

$$\tilde{g}_{n_1 n_2}^+ = \tilde{g}_{n_2 n_1}, \quad \sum_n \tilde{g}_{nn} = 0 \quad \text{et} \quad [\tilde{g}_{n_1 n_2}, \tilde{g}_{n_3 n_4}] = \tilde{g}_{n_1 n_4} \delta_{n_2 n_3} - \tilde{g}_{n_3 n_2} \delta_{n_1 n_4} \quad (1.42)$$

Par conséquent, seuls  $N^2 - 1$  de ces opérateurs sont indépendants. Notons de plus que chacun des générateurs précédent conserve son expression en terme des  $\tilde{g}_{n_1 n_2}$  qui constituent donc finalement l'essence du groupe  $SU(N)$ . Enfin, les commutateurs (1.42) étant similaires à ceux (1.35) de l'algèbre unitaire, les invariants de  $SU(N)$  résulteront d'une simple substitution  $g_{n_1 n_2} \rightarrow \tilde{g}_{n_1 n_2}$  dans l'expression (1.39) des observables de Casimir de  $U(N)$ . Il faut toutefois remarquer que l'opérateur linéaire  $C_1$  n'a plus lieu d'être puisqu'il s'annule en raison de (1.42).

### ■ Algèbre du groupe $SO(N)$

Les matrices  $M$  associées aux éléments du groupe sont alors réelles et astreintes à vérifier les relations suivantes :

$$MM' = M'M = I, \quad \det(M) = 1 \quad (1.43)$$

Elles peuvent ainsi toujours être écrites sous la forme  $M = \exp(Z)$  où  $Z$  est antisymétrique. Une transformation infinitésimale s'écrit donc  $M = I + d\lambda Z$  et sous son action une fonction  $f(\bar{x})$  va devenir :

$$f(\bar{x}') = f(\bar{x}) + d\lambda \sum_{n_1, n_2} Z_{n_2 n_1} g_{n_1 n_2} f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + d\lambda \sum_{n_1 < n_2} Z_{n_2 n_1} (g_{n_1 n_2} - g_{n_2 n_1}) f(\bar{x}) \quad (1.44)$$

avec comme précédemment  $g_{n_1 n_2} f(\bar{x}) = x_{n_1} \frac{\partial f}{\partial x_{n_2}}(\bar{x})$ . Il en résulte immédiatement que les générateurs de  $SO(N)$  à l'intérieur des fonctions complexes  $f(\bar{x})$  sont donnés par :

$$i(g_{n_1 n_2} - g_{n_2 n_1}), \quad n_1 < n_2 = 1 \rightarrow N \quad (1.45)$$

Posons de façon générale  $\Lambda_{n_1 n_2} = g_{n_1 n_2} - g_{n_2 n_1}$ , avec  $n_1$  et  $n_2$  variant entre 1 et  $N$ . Compte tenu des propriétés des opérateurs  $g_{n_1 n_2}$ , on a alors :

$$\Lambda_{n_1 n_2}^+ = \Lambda_{n_2 n_1}, \quad \Lambda_{n_2 n_1} = -\Lambda_{n_1 n_2}$$

$$[\Lambda_{n_1 n_2}, \Lambda_{n_3 n_4}] = \Lambda_{n_1 n_4} \delta_{n_2 n_3} + \Lambda_{n_2 n_3} \delta_{n_1 n_4} + \Lambda_{n_4 n_2} \delta_{n_1 n_3} + \Lambda_{n_3 n_1} \delta_{n_2 n_4} \quad (1.46)$$

Les générateurs de  $SO(N)$  sont de plus évidemment donnés par  $i \Lambda_{n_1 n_2}$  ( $n_1 < n_2 = 1 \rightarrow N$ ) et toutes leurs caractéristiques découlent donc de (1.46). En conséquence, un ensemble d'opérateurs  $\Lambda_{n_1 n_2}$  ( $n_1, n_2 = 1 \rightarrow N$ ) contraints par les relations (1.46) définit le groupe orthogonal  $SO(N)$  dans n'importe quel espace de Hilbert.

Au niveau des opérateurs de Casimir, signalons que l'algèbre orthogonale ne possède aucun invariant linéaire, mais qu'elle en admet un d'ordre 2 explicitement donné par [Fra94-Appendice B]:

$$C_2[SO(N)] = \sum_{n_1 n_2} \Lambda_{n_1 n_2} \Lambda_{n_2 n_1} \quad (1.47)$$



**Remarques :**

i) Dans les applications pratiques, l'identification des algèbres  $U(N)$ ,  $SU(N)$  ou  $SO(N)$  dans l'espace des observables d'un système repose rarement sur la mise en évidence directe des opérateurs  $g_{n_1 n_2}$ ,  $\tilde{g}_{n_1 n_2}$ ,  $A_{n_1 n_2}$  que nous venons d'introduire pour les caractériser. En fait ce sont plutôt des combinaisons linéaires indépendantes  $A_k$  de ces opérateurs que l'on isole. Leur ensemble est évidemment stable par commutation, mais la forme des commutateurs est en général très éloignée des relations (1.35), (1.42) ou (1.46) de sorte que la détermination du groupe de transformations associé est à priori délicate. Dans les applications physiques, le nombre des  $A_k$ , identique au nombre de paramètres du groupe, suffit cependant en général à effectuer une telle détermination. Il est néanmoins possible que différentes solutions soient acceptables : à titre d'illustration, les groupes  $SO(6)$  et  $SU(4)$ , ou  $SO(3)$  et  $SU(2)$ , ont le même nombre de paramètres et ne peuvent donc être distingués par ce critère. La pertinence de l'un des groupes par rapport aux autres tient alors à la nature de l'espace de Hilbert sur lequel sont définis les opérateurs  $A_k$  : par exemple dans le cas  $SO(3)$ - $SU(2)$ , il est impératif de privilégier  $SU(2)$  dès que les états de moment cinétique demi-entier sont susceptibles d'intervenir (cf. fin du paragraphe II-4).

ii) Toute l'argumentation qui a été présentée à propos du groupe orthogonal s'est appuyée sur les résultats établis au début de ce paragraphe II-3 et qui sont basés sur l'hypothèse d'une représentation non-projective du groupe. Or nous avons déjà mentionné (cf. II-2) que l'usage d'une telle représentation dans le cas des rotations n'est à priori possible qu'en travaillant dans le groupe de recouvrement  $Spin(n)$ . La démarche que nous avons adoptée trouve alors sa légitimité dans le fait que les 2 groupes coïncident au voisinage de l'identité. En d'autres termes, les représentations infinitésimales de  $SO(n)$  coïncident avec celles de  $Spin(n)$  et sont par conséquent non-projectives. L'algèbre (1.46), correspond donc finalement aux 2 groupes qui se distinguent par la manière de l'utiliser dans l'élaboration des opérateurs associés aux transformations finies.

iii) Pour conclure, examinons le cas bien connu des rotations tridimensionnelles de notre univers physique. Conformément aux résultats précédents, l'invariance de n'importe quel système sous le groupe  $SO(3)$  de ces transformations implique alors l'existence dans l'espace des états de 3 générateurs  $J_x = i \Lambda_{23}$ ,  $J_y = i \Lambda_{13}$  et  $J_z = i \Lambda_{12}$  dont l'algèbre se déduit de (1.46) :

$$[J_x, J_y] = iJ_z, [J_y, J_z] = iJ_x, [J_z, J_x] = iJ_y \quad (1.48)$$

Ces opérateurs s'identifient donc, à la constante de Planck près, avec les composantes du moment cinétique total  $\vec{J}$  du système. Par ailleurs, l'opérateur de Casimir (1.47) devient dans ce cas  $C_2[SO(3)] = 2(J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)$  et correspond logiquement avec le carré du moment cinétique. En d'autres termes, le postulat d'invariance par rotation engendre toute l'algèbre des moments angulaires dans l'espace des états et ce sans avoir recours au principe de correspondance avec la mécanique classique. Une analyse similaire peut d'ailleurs être menée à propos des autres invariances cinématiques. Dans le cas le plus général, à savoir celui du groupe de Poincaré qui rassemble les translations spatiales et temporelles, les rotations et les changements lorentziens de référentiels, on retrouve ainsi toute l'algèbre des observables fondamentales d'une particule isolée (hamiltonien, impulsion, moment cinétique). En outre, les opérateurs de Casimir associés conduisent alors à une définition précise de la masse et du spin [Wei95-chapitre 2]. Ces éléments illustrent en fait de nouveau l'apport des symétries dans l'élaboration des modèles quantiques.



#### ④ Structuration de l'espace des états induite par le groupe de symétrie

Une conséquence bien connue des symétries est l'apparition de dégénérescences dans le spectre de l'hamiltonien  $H$  du système. Etant donné un état propre  $|n\rangle$  associé à l'énergie  $E_n$ , l'hypothèse d'invariance (1.14) implique en effet que tous les vecteurs  $G_a |n\rangle$  correspondent également à cette même énergie. En introduisant un indice de dégénérescence  $\nu$ , l'espace des vecteurs propres  $|n, \nu\rangle$  du niveau  $E_n$  apparaît ainsi stable vis-à-vis des opérations  $G_a$  du groupe de symétrie. Nous allons alors supposer qu'il est en plus irréductible, c'est-à-dire qu'on ne peut isoler en son sein aucun sous-espace invariant. Autrement dit, quelle que soit la base orthonormée choisie dans l'espace  $\{|n, \nu\rangle\}_\nu$ , il est impossible de représenter simultanément chacun des opérateurs  $G_a$  par une matrice diagonale par bloc. Cette hypothèse fondamentale constitue le principe de Wigner [Wig59] et bien que sa justification provienne de la validité de ses conséquences, quelques commentaires peuvent aider à en comprendre l'origine. Imaginons qu'il existe un espace propre  $\{|n, \nu\rangle\}_\nu$  dans lequel il subsiste des vecteurs en dehors d'un sous-espace irréductible. En appliquant sur un quelconque des vecteurs de ce sous-espace, l'ensemble des opérateurs  $G_a$  du groupe de symétrie, on génère alors nécessairement l'intégralité du sous-espace. En conséquence, les autres vecteurs propres de l'espace  $\{|n, \nu\rangle\}_\nu$  deviendraient déconnectés de la loi d'invariance de l'hamiltonien. Pour des groupes continus, une telle situation serait pour le moins étrange au regard des conclusions précédemment établies : comment en effet comprendre que l'hamiltonien soit déterminé par le groupe de symétrie grâce aux opérateurs de Casimir mais qu'il en soit différemment pour sa diagonalisation ? Afin d'éviter ce genre de paradoxe, le principe de Wigner interdit donc aux espaces propres de l'hamiltonien de présenter un caractère réductible vis-à-vis du groupe de symétrie. Par conséquent si de telles situations se présentent (on parle alors de dégénérescence accidentelle), il nous faudra admettre l'existence d'une symétrie cachée omise dans le dénombrement des transformations auxquelles le système est insensible. Ce bilan incomplet aura alors conduit à postuler l'invariance vis-à-vis d'opérateurs  $G_a$  formant en réalité un sous-groupe du groupe complet de symétrie et pour lesquels le critère d'irréductibilité n'a plus lieu d'être. A titre d'illustration, une telle situation se produit par exemple pour l'atome d'hydrogène ou l'oscillateur harmonique isotrope [Wyb74-chapitres 20 et 21]. En définitive, l'identification de la totalité des opérations sous lesquelles un système est invariant constitue une étape essentielle dans la modélisation de ce système par la théorie des groupes.

En dépit du caractère irréductible, l'action du groupe dans les différents espaces propres de l'hamiltonien  $H$  est en général différente. Il est cependant possible que chacun des opérateurs  $G_a$  admette la même traduction matricielle dans certains des espaces propres de  $H$  moyennant un choix judicieux de base orthonormée. Il est alors logique d'attribuer à tous ces espaces un label commun  $\Gamma$  et ainsi de les désigner par  $\mathcal{E}_\Gamma^{(1)}, \mathcal{E}_\Gamma^{(2)}, \dots, \mathcal{E}_\Gamma^{(\eta)}, \dots, \mathcal{E}_\Gamma^{(m_\Gamma)}$ ,  $m_\Gamma$  étant la multiplicité de  $\Gamma$ . En notant  $|\eta \Gamma \gamma\rangle$  la base orthonormée à l'intérieur de chacun qui permet aux  $G_a$  d'adopter des matrices identiques, nous aurons donc :

$$H |\eta \Gamma \gamma\rangle = E_\Gamma^{(\eta)} |\eta \Gamma \gamma\rangle \text{ et } G_a |\eta \Gamma \gamma_1\rangle = \sum_{\gamma_2} \langle \gamma_1 | G_a | \gamma_2 \rangle_\Gamma |\eta \Gamma \gamma_2\rangle \quad (1.49)$$

où l'on a désigné par  $E_\Gamma^{(\eta)}$  les niveaux d'énergie et noté sous la forme simplifiée  $\langle \gamma_1 | G_a | \gamma_2 \rangle_\Gamma$  les éléments de matrice  $\langle \eta \Gamma \gamma_1 | G_a | \eta \Gamma \gamma_2 \rangle$  indépendants de  $\eta$  par définition de la base. Il résulte



immédiatement que chacune des relations (1.17.a-d) caractéristiques des opérateurs  $G_a$  se vérifie également au niveau des matrices d'éléments  $\langle \gamma_1 | G_a | \gamma_2 \rangle_\Gamma$ . Celles-ci engendrent donc dans chaque espace  $\mathcal{E}_\Gamma^{(n)}$  une représentation du groupe de symétrie. Par ailleurs, afin de traduire l'absence de sous-espace invariant dans l'espace sur lequel s'appuie cette représentation, elle sera naturellement qualifiée d'irréductible. Signalons que le nom de représentation irréductible (RI) est aussi souvent donné au label  $\Gamma$ .

Sur le plan mathématique, les RI jouissent d'un certain nombre de propriétés remarquables que nous allons énoncer pour les groupes finis ou continus compacts (rappelons que ces groupes sont caractérisés par des paramètres évoluant dans un domaine borné). Leur démonstration pourra être trouvée dans la référence [Ham62-chapitres 3 et 8] :

- Lemme de Schur : un opérateur qui commute avec tous les éléments d'une RI est proportionnel à l'identité.

(1.50)

- Les espaces support d'une RI  $\Gamma$  sont de dimension finie  $d_\Gamma$

(1.51)

- Théorème d'orthogonalité :  $\int_a d\mu(a) \langle \gamma_{k_1} | G_a | \gamma_{k_2} \rangle_{\Gamma_k}^* \langle \gamma_{l_1} | G_a | \gamma_{l_2} \rangle_{\Gamma_l} = \frac{1}{d_{\Gamma_k}} \delta_{kl} \delta_{k_1 k_2} \delta_{l_1 l_2}$

(1.52)

où la notation  $\int_a d\mu(a) \dots$  se réfère dans le cas discret à une sommation sur les

éléments du groupe pondérée par leur nombre  $\Omega$ , soit  $\int_a d\mu(a) f(a) = \frac{1}{\Omega} \sum_a f(a)$  et

dans le cas continu à une intégration sur les paramètres  $a$  moyennant l'introduction d'un élément différentiel adéquat  $d\mu(a)$  appelé mesure de Haar. Celui-ci représente en fait le "nombre" de transformations du groupe dans un domaine infinitésimal de l'espace des paramètres.

Il faut encore préciser que dans le cas d'un groupe discret, le nombre de RI est fini et s'identifie avec le nombre de classes de conjugaison  $\rho$ , où se trouvent réunies, par définition, les opérations  $G_a^{(\rho)}, G_b^{(\rho)}, \dots$  pour lesquelles il existe un élément  $G_x$  tel que  $G_a^{(\rho)} = G_x G_b^{(\rho)} G_x^{-1}$  [Ham62-chapitre 1]. Au contraire, les groupes continus admettent en général une infinité de représentations irréductibles.

Chaque RI  $\Gamma$  peut d'autre part être caractérisée indépendamment du choix d'une base dans son espace-support par les caractères  $\chi_\Gamma(a)$  définis comme les traces des matrices  $\{ \langle \gamma_1 | G_a | \gamma_2 \rangle_\Gamma \}_{\gamma_1, \gamma_2}$  :

$$\chi_\Gamma(a) = \sum_\gamma \langle \gamma | G_a | \gamma \rangle_\Gamma \quad (1.53)$$

Ainsi,  $\chi_\Gamma(0) = \sum_\gamma \langle \gamma | G_0 | \gamma \rangle_\Gamma = \sum_\gamma 1 = d_\Gamma$  et en raison du théorème (1.52) :

$$\int_a d\mu(a) \chi_{\Gamma_k}^*(a) \chi_{\Gamma_l}(a) = \delta_{kl} \quad (1.54)$$



L'ensemble des  $\chi_r(a)$  est en fait connu pour la plupart des groupes et on adopte souvent une présentation sous forme de tableaux où figurent en ligne les RI et en colonne les éléments :

	$G_o$	$G_a$	.....
$\Gamma_l$	$d_{\Gamma_l}$	$\chi_{\Gamma_l}(a)$	.....
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\Gamma_k$	$d_{\Gamma_k}$	$\chi_{\Gamma_k}(a)$	.....
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Ces caractères jouent un rôle essentiel dans les applications de la théorie des groupes. Par exemple, supposons que l'on connaisse les opérateurs  $G_a$  du groupe dans une base orthonormée  $\{|u_k\rangle\}_k$  quelconque de l'espace des états. Les traces  $\chi(a)$  de ces opérateurs peuvent alors être aisément obtenues et s'écrivent selon la base où on les évalue :

$$\chi(a) = \sum_k \langle u_k | G_a | u_k \rangle = \sum_{\Gamma} \sum_{\eta=1}^{m_{\Gamma}} \sum_{\gamma=1}^{d_{\Gamma}} \langle \gamma | G_a | \gamma \rangle_{\Gamma} \quad (1.55)$$

Après multiplication par  $\chi_T(a)$  puis intégration sur le groupe, et en utilisant (1.52), il vient aisément :

$$m_{\Gamma} = \int d\mu(a) \chi^*(a) \chi_T(a) \quad (1.56)$$

Ainsi, les propriétés d'invariance de l'hamiltonien  $H$  suffisent à déterminer les RI qui interviennent dans son spectre et donc la dégénérescence de ses niveaux d'énergie. Si l'on veut connaître précisément ces niveaux, il faudra alors construire la matrice de  $H$  dans chaque RI dont une base (en général non orthonormée) peut être obtenue par application d'un projecteur déduit de (1.52) et donné par :

$$P_{\Gamma} = \int d\mu(a) \chi_{\Gamma}^*(a) G_a \quad (1.57)$$

A titre d'illustration, une telle démarche est couramment utilisée dans les calculs d'orbitales moléculaires en chimie quantique [Bun79]. L'utilisation des formules de réduction (1.56-57) peut également être utile dans les problèmes de couplages où l'on s'intéresse à la décomposition en RI du produit tensoriel de deux espaces irréductibles  $\mathcal{E}_{\Gamma_k}^{(\eta_k)}$  et  $\mathcal{E}_{\Gamma_l}^{(\eta_l)}$  associés chacun par exemple à une partie du système considéré. En effet, si l'on note  $\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_l$  les espaces dont font partie  $\mathcal{E}_{\Gamma_k}^{(\eta_k)}, \mathcal{E}_{\Gamma_l}^{(\eta_l)}$  et  $G_{k,a}, G_{l,a}$  les opérateurs du groupe à l'intérieur de chacun d'eux, les produits  $G_a = G_{k,a} \otimes G_{l,a}$  désignés plus simplement par  $G_{k,a} G_{l,a}$  engendrent sur  $\mathcal{E}_k \otimes \mathcal{E}_l$  une représentation (1.17) comme on peut aisément s'en convaincre à partir de leurs éléments de matrice dans la base découplée  $\{|\eta_k \Gamma_k \gamma_k ; \eta_l \Gamma_l \gamma_l\rangle\}_{\gamma_k \gamma_l}$  :

$$\langle \eta_k \Gamma_k \gamma_{k_1} ; \eta_l \Gamma_l \gamma_{l_1} | G_a | \eta_k \Gamma_k \gamma_{k_2} ; \eta_l \Gamma_l \gamma_{l_2} \rangle = \langle \gamma_{k_1} | G_{k,a} | \gamma_{k_2} \rangle_{\Gamma_k} \langle \gamma_{l_1} | G_{l,a} | \gamma_{l_2} \rangle_{\Gamma_l} \quad (1.58)$$

Cependant le sous-espace  $\mathcal{E}_{\Gamma_k}^{(\eta_k)} \otimes \mathcal{E}_{\Gamma_l}^{(\eta_l)}$  n'est pas en général irréductible et les différentes RI  $\Gamma$  qui le composent peuvent être obtenues en recherchant leur multiplicité  $m_{\Gamma}$  donnée par (1.56) et



qui dans le cas présent devient  $m_\Gamma = \int_a d\mu(a) \chi_{T_k}^*(a) \chi_{T_l}^*(a) \chi_T(a)$ . On pose alors souvent  $\Gamma_k \otimes \Gamma_l = \bigoplus_\Gamma m_\Gamma \Gamma$ , relation qui est désignée sous le nom de série de Clebsch-Gordan. Par ailleurs, l'application du projecteur  $P_\Gamma$  (1.57) sur les vecteurs  $|\eta_k \Gamma_k \gamma_k ; \eta_l \Gamma_l \gamma_l\rangle$  suivie d'un processus d'orthonormalisation permet de générer tous les kets indépendants de l'espace  $\mathcal{E}_{\Gamma_k}^{(\eta_k)} \otimes \mathcal{E}_{\Gamma_l}^{(\eta_l)}$  qui se transforment suivant la représentation irréductible  $\Gamma$ . Ces états couplés sont donc logiquement écrits  $|(\eta_k \Gamma_k ; \eta_l \Gamma_l) \omega \Gamma \gamma\rangle$  où  $\omega = 1 \rightarrow m_\Gamma$  est un indice de multiplicité nécessaire dès que  $\Gamma$  apparaît plusieurs fois dans le produit  $\Gamma_k \otimes \Gamma_l$  et où  $\gamma = 1 \rightarrow d_\Gamma$  sert comme précédemment à distinguer les différents vecteurs qui sous-tendent la RI. En outre, les coefficients permettant de construire le schéma couplé à partir de la base découplée sont indépendants des labels  $\eta_k$  et  $\eta_l$  puisqu'il en est ainsi des matrices représentant les opérateurs du groupe dans cette même base [cf. équation (1.58)]. On note donc ces coefficients de couplage  $\langle \Gamma_k \gamma_k ; \Gamma_l \gamma_l | \omega \Gamma \gamma \rangle$  et ainsi :

$$|(\eta_k \Gamma_k ; \eta_l \Gamma_l) \omega \Gamma \gamma\rangle = \sum_{\gamma_k \gamma_l} \langle \Gamma_k \gamma_k ; \Gamma_l \gamma_l | \omega \Gamma \gamma \rangle | \eta_k \Gamma_k \gamma_k ; \eta_l \Gamma_l \gamma_l \rangle \quad (1.59)$$

Malgré l'algorithme qui vient d'être présenté, le calcul des matrices de Clebsch-Gordan du groupe  $\{ \langle \Gamma_k \gamma_k ; \Gamma_l \gamma_l | \omega \Gamma \gamma \rangle \}$  est en général très complexe et ne peut que rarement être mené analytiquement. Leur détermination est toutefois simplifiée lorsque l'algèbre est simplement réductible, c'est-à-dire quand l'indice de multiplicité  $\omega$  est inutile. C'est par exemple le cas pour le groupe des rotations où les RI sont caractérisées par le nombre quantique de moment cinétique  $J$ , et s'appuient sur les vecteurs  $\{|J, M\rangle\}_{M=-J, \dots, J}$ . Il est en effet bien connu que :

$$J_k \otimes J_l = |J_k - J_l| \oplus |J_k - J_l| + 1 \oplus \dots \oplus J_k + J_l - 1 \oplus J_k + J_l \quad (1.60)$$

La relation (1.59) permet alors de retrouver l'expression des vecteurs couplés :

$$|(J_k ; J_l) JM\rangle = \sum_{M_k M_l} \langle J_k M_k ; J_l M_l | JM \rangle |J_k M_k ; J_l M_l\rangle \quad (1.61)$$

En dehors de la description des systèmes composites qui vient d'être abordée, les coefficients de couplage jouent également un rôle important dans la discussion des règles de sélection régissant les transitions entre les états propres de l'hamiltonien. En effet, il est fréquent que l'opérateur mis en jeu dans la transition puisse être identifié comme l'un des éléments d'une famille  $\{O_\gamma^\Gamma\}$  se transformant vis-à-vis du groupe de la même manière que les vecteurs d'une de ses RI  $\Gamma$ . On parle alors d'opérateur tensoriel irréductible et compte tenu des relations (1.8) et (1.49), on a donc :

$$G_a O_{\gamma_1}^\Gamma G_a^+ = \sum_{\gamma_2} \langle \gamma_1 | G_a | \gamma_2 \rangle_\Gamma O_{\gamma_2}^\Gamma \quad (1.62)$$

Dans une telle situation, les éléments de matrice d'une composante  $O_\gamma^\Gamma$  entre 2 états propres  $|\eta_i \Gamma_i \gamma_i\rangle$  et  $|\eta_f \Gamma_f \gamma_f\rangle$  de l'hamiltonien peuvent en fait s'exprimer comme une somme de produits entre un coefficient de couplage et un élément réduit (noté  $\langle . \| . \| \rangle$ ) indépendant des



nombres quantiques internes aux RI considérées. Cette affirmation constitue le théorème de Wigner-Eckart et se formule explicitement par [Wyb74-chapitre 19] :

$$\langle \eta_f \Gamma_f \gamma_f | O_f^\Gamma | \eta_i \Gamma_i \gamma_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{d_{\Gamma_f}}} \sum_{\omega} \langle \Gamma_i \gamma_i ; \Gamma \gamma | \omega \Gamma_f \gamma_f \rangle \langle \eta_f \Gamma_f || O_f^\Gamma || \eta_i \Gamma_i \rangle \quad (1.63)$$

où  $d_{\Gamma_f}$  est la dimension de  $\Gamma_f$ , et  $\omega$  le label de multiplicité indispensable lorsque la série de Clebsch-Gordan  $\Gamma_i \otimes \Gamma$  contient plusieurs fois  $\Gamma_f$ . Il en résulte immédiatement que si le produit tensoriel de la RI initiale  $\Gamma_i$  avec celle  $\Gamma$  de l'opérateur ne contient pas la représentation finale  $\Gamma_f$ , le coefficient de couplage et l'élément de matrice sont nuls interdisant ainsi la transition entre les états considérés. Signalons encore que toutes les relations connues dans le groupe des rotations pour évaluer les éléments réduits peuvent également se généraliser à n'importe quelle algèbre [Wyb74-chapitre 19].

### En résumé :

La manière dont les états et observables d'un système se modifient sous l'action du groupe de symétrie peut toujours se déduire d'un certain nombre de modes fondamentaux de transformation entièrement déterminés par la structure du groupe et qui constituent ses représentations irréductibles (RI). L'invariance de l'hamiltonien oblige en outre chacun des états propres à se classer parmi l'une de ces RI. Enfin, en présence de perturbations, deux niveaux seront connectés si l'opérateur de transition présente une composante se transformant selon une RI susceptible de coupler celle des états considérés, donnant ainsi naissance à des règles de sélection.

Pour conclure et afin d'illustrer la notion de représentation irréductible, nous allons rechercher les RI du groupe unitaire  $U(N)$  en se plaçant dans l'espace de Fock de la seconde quantification. Un tel choix est pleinement justifié par l'étude menée au paragraphe II-3 où nous avons en effet mis en évidence la possibilité de réaliser une algèbre unitaire à partir des opérateurs de création  $c^+$  et d'annihilation  $c$  d'un système de fermions ou de bosons identiques. Cependant dans ce cas, les seuls vecteurs physiques sont nécessairement antisymétriques ou symétriques dans l'échange de 2 quelconques des particules et il est prévisible qu'une si forte contrainte interdise à certaines représentations irréductibles de  $U(N)$  d'être supportées par l'espace des états. Afin d'éviter ces problèmes, nous allons généraliser les résultats établis auparavant en considérant de nouveau un système de fermions ou de bosons mais constitué de plusieurs types de particules repérés chacun par un indice  $\alpha$ . Il sera en outre supposé qu'indépendamment de leur nature, toutes les particules peuvent accéder aux mêmes états individuels  $|n\rangle$  ( $n = 1 \rightarrow N$ ). Avec de telles hypothèses, une algèbre  $U(N)$  générée par les opérateurs  $g_{n_1 n_2} = \sum_{\alpha} c_{\alpha n_1}^+ c_{\alpha n_2}$  est aisément identifiable : il suffit pour s'en convaincre de reprendre les calculs menés au paragraphe II-3 en remarquant que les opérateurs associés à des particules distinctes commutent. La construction de sous espaces irréductibles vis-à-vis des transformations issues de cette algèbre repose alors sur l'introduction dans l'espace des états à  $N$  particules de fonctions polynômiales des  $c_{\alpha n}^+$  nommées  $Q$  de façon générale :

$$Q = \sum_{\{p_{\alpha n}\}} x_{\{p_{\alpha n}\}} \prod_{\alpha} (c_{\alpha 1}^+)^{p_{\alpha 1}} \dots (c_{\alpha n}^+)^{p_{\alpha n}} \dots (c_{\alpha N}^+)^{p_{\alpha N}} \quad (1.64)$$



où  $p_{\alpha n} = 0, 1$  pour des fermions,  $p_{\alpha n} = 0, 1, \dots, \mathcal{N}$  pour des bosons et  $\sum_{\alpha n} p_{\alpha n} = \mathcal{N}$ . Il est en plus imposé aux configurations de particules indépendantes qui entrent dans la composition de ces polynômes de présenter les mêmes nombres d'occupation  $\lambda_n = \sum_{\alpha} p_{\alpha n}$  des différents états  $|n\rangle$ .

Du point de vue terminologie, l'ensemble des  $\lambda_n$  est appelé poids du polynôme et on le note  $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, \lambda_N]$ . Remarquons que tous les  $\lambda_n$  sont des entiers positifs ou nuls et que leur somme est égale au nombre  $\mathcal{N}$  de particules. Ils peuvent en plus être extraits par application des opérateurs  $g_{nn} = \sum_{\alpha} c_{\alpha n}^+ c_{\alpha n}$ , et ce dans la mesure où :

$$g_{nn}Q = \lambda_n Q \quad (1.65)$$

Par ailleurs, les relations de commutation (1.35) caractéristiques de l'algèbre  $U(N)$  impliquent  $[g_{nn}, g_{n_1 n_2}] = \delta_{nn_1} g_{nn_2} - \delta_{nn_2} g_{n_1 n}$  et en conséquence :

$$g_{nn}(g_{n_1 n_2}Q) = (\lambda_n + \delta_{nn_1} - \delta_{nn_2})(g_{n_1 n_2}Q) \quad (1.66)$$

Il en résulte que le poids du polynôme  $g_{n_1 n_2}Q$  ( $n_1 \neq n_2$ ) est identique à celui de  $Q$  mis à part les coefficients  $\lambda_{n_1}$  et  $\lambda_{n_2}$  qui sont respectivement augmentés et diminués de 1. Si l'on convient d'ordonner les poids en posant  $[\lambda] > [\lambda']$  dès que la première valeur non-nulle de la suite  $(\lambda_1 - \lambda'_1, \lambda_2 - \lambda'_2, \dots, \lambda_N - \lambda'_N)$  est positive,  $g_{n_1 n_2}Q$  a donc un poids supérieur à  $Q$  lorsque  $n_1 < n_2$  et inférieur quand  $n_1 > n_2$ . On peut ainsi cataloguer les générateurs de  $U(N)$  en 3 catégories :

- i) les opérateurs de poids  $g_{nn}$ ,  $n = 1 \rightarrow N$
- ii) les incréments de poids  $g_{n_1 n_2}$ ,  $n_1 < n_2$  et  $n_1, n_2 = 1 \rightarrow N$
- iii) les décréments de poids  $g_{n_1 n_2}$ ,  $n_1 > n_2$  et  $n_1, n_2 = 1 \rightarrow N$

Dès lors, il est possible d'établir [Mos68] que toute RI de  $U(N)$  dans l'espace de Hilbert considéré est sous-tendue par l'ensemble des vecteurs indépendants qui résultent de l'action successive des décréments sur un état de poids maximum  $Q_h | \rangle$  vérifiant donc :

$$g_{n_1 n_2}Q_h = 0, \quad n_1 < n_2 \text{ et } n_1, n_2 = 1 \rightarrow N \quad (1.67)$$

Chaque représentation irréductible sera donc caractérisée par le poids  $[\lambda]$  du polynôme  $Q_h$  qui lui est attachée. Compte tenu de (1.67), ce poids ne peut en réalité être quelconque. En effet, on a toujours  $\langle | Q_h^+ g_{n_1 n_2}^+ g_{n_1 n_2} Q_h | \rangle \geq 0$  avec :

$$g_{n_1 n_2}^+ g_{n_1 n_2} = g_{n_2 n_1} g_{n_1 n_2} = g_{n_1 n_2} g_{n_2 n_1} + g_{n_2 n_2} - g_{n_1 n_1}$$

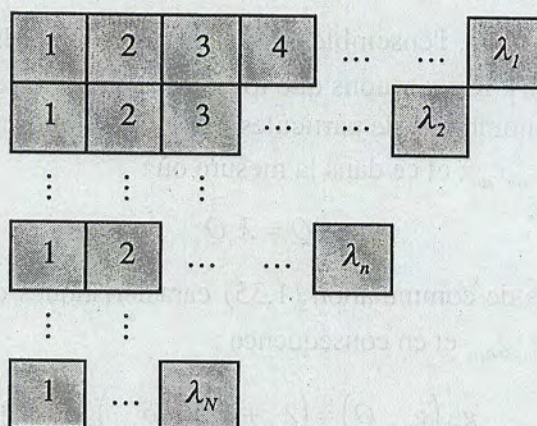
et  $g_{n_2 n_1}Q_h = 0$  en choisissant  $n_1 > n_2$  (1.68)

Dans ce cas,  $\langle | Q_h^+ g_{n_1 n_2}^+ g_{n_1 n_2} Q_h | \rangle = \langle | Q_h^+ (g_{n_2 n_2} - g_{n_1 n_1}) Q_h | \rangle = \lambda_{n_2} - \lambda_{n_1} \geq 0$ , de sorte que :

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots \geq \lambda_N \quad (1.69)$$



Finalement, les RI de  $U(N)$  sont donc définies par une suite décroissante de  $N$  entiers naturels  $\lambda_n$ . Habituellement, la partition  $[\lambda] = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots, \lambda_N]$  ainsi définie est représentée graphiquement sous la forme d'un schéma de Young :



Revenons alors aux systèmes formés de particules toutes identiques pour lesquels le caractère totalement antisymétrique ou symétrique des vecteurs d'état est susceptible de donner naissance à de nouvelles contraintes sur les RI de l'algèbre unitaire supportée par l'espace de Fock. Vis-à-vis des notations qui ont été introduites, l'indice  $\alpha$  est maintenant inutile et les polynômes de plus haut poids s'écrivent donc simplement  $Q_h = (c_1^+)^{\lambda_1} (c_2^+)^{\lambda_2} \dots (c_n^+)^{\lambda_n} \dots (c_N^+)^{\lambda_N}$ . Or, pour des fermions, le principe de Pauli nécessite  $\lambda_n = 0$  ou  $1$ . Par conséquent le poids  $[\lambda]$ , astreint à vérifier la règle (1.69), ne peut être formé que d'une suite de 1 suivie de 0. La somme des  $\lambda_n$  étant égale au nombre total  $N$  de particules, nous aurons donc  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = 1$  et  $\lambda_{N+1} = \lambda_{N+2} = \dots = \lambda_N = 0$ . Notons qu'avec de telles valeurs, la relation (1.67) est automatiquement vérifiée :  $g_{n_1 n_2} Q_h = c_{n_1}^+ c_{n_2} Q_h = 0$  dès que  $n_1 < n_2$ . En définitive, seule la RI  $[\underbrace{1, \dots, 1}_{N \text{ fois}}] = [1^N]$  est autorisée dans un système de fermions identiques et logiquement le nom de représentation totalement antisymétrique lui est attribué. Lorsqu'au contraire les particules sont des bosons, les occupations  $\lambda_n$  ne sont plus restreintes que par le nombre de particules. Cependant afin de satisfaire  $g_{n_1 n_2} Q_h = c_{n_1}^+ c_{n_2} Q_h = 0$  ( $n_1 < n_2$ ), il est nécessaire que  $\lambda_{n_2} = 0$  pour tout  $n_2 > 1$ . Comme précédemment, il n'y a donc qu'une RI compatible avec la statistique d'un système de bosons identiques, à savoir celle qui s'écrit  $[\underbrace{N, 0, \dots, 0}_{N-1 \text{ fois}}] = [N]$  et qu'on qualifie naturellement de représentation totalement symétrique.

Enfin, nous avons vu au paragraphe II-3 que l'algèbre  $U(N)$  possédait  $N$  opérateurs de Casimir  $C_p$  ( $p = 1 \rightarrow N$ ) donnés par l'expression (1.39). En particulier, l'invariant linéaire  $C_1$  s'identifie avec la somme des opérateurs de poids  $g_{nn}$  et l'invariant quadratique s'écrit  $C_2 = \sum_{n_1 n_2} g_{n_1 n_2} g_{n_2 n_1}$ . De plus, conformément au lemme de Schur (1.50), chacun de ces opérateurs  $C_p$  est diagonal dans n'importe quel espace irréductible. En d'autres termes, tout état se transformant suivant une RI  $[\lambda]$  du groupe  $U(N)$  est vecteur propre des opérateurs de Casimir



de ce groupe et les valeurs propres  $\langle C_p \rangle_{[\lambda]}$  s'expriment donc nécessairement à l'aide des  $\lambda_n$ .

Par exemple :  $C_1 Q_h = \sum_n \underbrace{g_{nn} Q_h}_{\lambda_n Q_h} = \left( \sum_n \lambda_n \right) Q_h$  et donc :

$$\langle C_1 \rangle_{[\lambda]} = \sum_{n=1}^N \lambda_n. \quad (1.70)$$

De façon similaire, en notant que

$$C_2 = \sum_n g_{nn} g_{nn} + \sum_{n_1 > n_2} g_{n_2 n_1} g_{n_1 n_2} + \sum_{n_1 < n_2} g_{n_1 n_2} g_{n_2 n_1} \quad (1.71)$$

avec  $g_{n_1 n_2} g_{n_2 n_1} = g_{n_2 n_1} g_{n_1 n_2} + g_{n_1 n_1} - g_{n_2 n_2}$  [cf. équation (1.35)], il vient :

$$C_2 Q_h = \left[ \sum_n \lambda_n^2 + \sum_{n_1 < n_2} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2}) \right] Q_h, \text{ soit } \langle C_2 \rangle_{[\lambda]} = \sum_n \lambda_n^2 + \sum_{n_1 < n_2} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2}). \quad (1.72)$$

En outre,  $\sum_{n_1 < n_2} (\lambda_{n_1} - \lambda_{n_2}) = \sum_{n_1=1}^N \lambda_{n_1} (N - n_1) - \sum_{n_2=1}^N \lambda_{n_2} (n_2 - 1) = \sum_{n=1}^N \lambda_n (N + 1 - 2n)$ , de sorte que :

$$\langle C_2 \rangle_{[\lambda]} = \sum_{n=1}^N \lambda_n (\lambda_n + N + 1 - 2n) \quad (1.73)$$

Signalons, à titre indicatif, que par un raisonnement similaire il est aisé d'obtenir l'expression générale des valeurs propres de l'invariant d'ordre  $p$  :

$$\langle C_p \rangle_{[\lambda]} = \text{Tr}(X^p) \quad (1.74)$$

où  $X$  est la matrice  $N \times N$  d'éléments  $X_{n_1 n_2} = (\lambda_{n_1} + p - n_1) \delta_{n_1 n_2} - \begin{cases} 1 & \text{pour } n_1 < n_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Rappelons

cependant que les invariants  $C_p$  avec  $p \geq 3$  sont peu utilisés dans la description algébrique des systèmes physiques en raison des termes à  $p$ -corps qui interviennent dans l'expression de ces opérateurs en seconde quantification.

L'analyse qui vient d'être menée pour le groupe unitaire peut en réalité être réitérée pour tous ses sous-groupes tels  $SU(N)$  ou  $SO(N)$ . Un exposé détaillé d'une telle étude pourra être trouvé dans la référence [Cha68] et nous allons simplement en donner les principaux résultats :

- Les représentations irréductibles du groupe  $SU(N)$  sont déterminées par un schéma de Young à  $N-1$  lignes où l'opérateur de Casimir quadratique  $C_2$  prend par ailleurs la valeur suivante :

$$\langle C_2 \rangle_{[\lambda]} = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n (\lambda_n + N + 1 - 2n) - \frac{1}{N} \left( \sum_{n=1}^{N-1} \lambda_n \right)^2 \quad (1.75)$$

- Pour le groupe orthogonal  $SO(N)$ , chaque RI est caractérisée par une suite notée  $(\sigma) = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_\omega \dots \sigma_\Omega)$  et comportant  $\Omega = N/2$  ou  $(N-1)/2$  éléments selon respectivement que  $N$  est pair ou impair. Tous les  $\sigma_\omega$  sont en outre positifs mis à part le



dernier qui peut prendre des valeurs négatives quand  $N$  est pair. Ils vérifient en plus la règle de décroissance  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\Omega-1} \geq |\sigma_\Omega|$  et ne peuvent qu'adopter dans leur ensemble des valeurs entière ou demi-entières, ce dernier cas correspondant en fait à une représentation dite spinorielle du groupe de recouvrement  $Spin(N)$ . Enfin l'invariant de Casimir d'ordre 2, prend dans chaque espace irréductible la valeur :

$$\langle C_2 \rangle_{(\sigma)} = \sum_{\omega=1}^{\Omega} 2\sigma_{\omega}(\sigma_{\omega} + N - 2n) \quad (1.76)$$

*Remarques :*

Les labels  $\sigma_{\omega}$  qui viennent d'être introduits sont en fait une généralisation des nombres quantiques de moment cinétique  $J$  ou  $M$ . En effet, pour le groupe  $SO(3)$  des rotations de notre univers, les considérations précédentes amènent à caractériser chaque RI par un unique nombre  $\sigma$  grâce auquel les valeurs propres de l'opérateur de Casimir  $C_2$  s'écrivent  $2\sigma(\sigma + 1)$ . Or nous avons vu auparavant que  $C_2[SO(3)] = 2J^2$  obligeant ainsi  $\sigma$  à s'identifier avec le nombre quantique de moment cinétique  $J$ . De façon similaire, chaque valeur de  $M$  désigne en fait une RI du groupe  $SO(2)$  des rotations autour d'une direction fixe de l'espace. Signalons encore qu'à l'intérieur d'un sous espace  $|J, M\rangle$  avec  $J$  demi-entier, il est aisé de prouver que chaque rotation est en réalité représentée dans par 2 opérateurs  $R$  et  $-R$  mais qui sont chacun associés à une et une seule transformation de  $SU(2)$  [Ham62-chapitre 9] : les RI pour lesquelles  $J$  est demi-entier sont donc en fait des représentations projectives pour  $SO(3)$  et des représentations non-projectives pour  $SU(2)$  (dans ce cas,  $[2J]$  est d'ailleurs le schéma de Young associé). Par conséquent, comme nous ne travaillerons qu'avec des opérateurs isomorphes aux transformations, l'invariance par rotation se manifesterà dans la suite par le groupe  $SU(2)$  (équivalent au groupe de recouvrement) si le système autorise des états de moment cinétique demi-entier et sinon par le groupe  $SO(3)$ . Cette remarque illustre le propos général du théorème (1.76) concernant la nécessité de travailler avec  $Spin(N)$  lorsque des représentations spinorielles sont mises en jeu.

---

### III - Notion d'invariance dynamique

---

De façon générale, l'opportunité offerte à un système pour exhiber le concept de symétrie dynamique est basée sur la possibilité d'identifier dans son espace des états les algèbres d'au moins 2 groupes continus  $G^{(1)}$  et  $G^{(2)}$  avec  $G^{(1)} \supset G^{(2)}$ . Dès lors, si le système est invariant sous les transformations du groupe principal  $G^{(1)}$ , nous avons vu que son l'hamiltonien peut toujours s'écrire en terme des différents opérateurs de Casimir  $C_p(G^{(1)})$  de ce groupe :

$$H = H^{(1)}\left(\left\{C_p(G^{(1)})\right\}\right) \quad (1.77)$$

En conséquence, chaque état propre de  $H$  est non seulement caractérisé par une représentation irréductible  $\Gamma^{(1)}$  du sous-groupe  $G^{(1)}$  mais aussi par l'une  $\Gamma^{(2)}$  du sous groupe  $G^{(2)}$  puisque



l'hamiltonien (1.77) a également la symétrie de ce sous-groupe. Formellement, la détermination des RI  $\Gamma^{(2)}$  compatibles avec  $\Gamma^{(1)}$  résulte de l'évaluation via la relation (1.56) de la multiplicité de chacune d'entre elles après calcul des caractères des éléments de  $G^{(1)}$  à l'intérieur de l'ensemble des vecteurs se transformant suivant  $\Gamma^{(1)}$ . On ne peut alors exclure une multiplicité supérieure à 1 et dans le cas général un nombre quantique  $\eta^{(12)}$  doit donc être introduit afin de différencier les sous-espaces irréductibles du type  $\Gamma^{(2)}$  qui sont contenus dans  $\Gamma^{(1)}$ . Enfin, il faut bien sur pouvoir énumérer les kets qui génèrent ces sous-espaces si bien qu'un autre indice  $\gamma^{(2)}$  variant jusqu'à la dimension de la RI  $\Gamma^{(2)}$  est nécessaire. Nous sommes ainsi finalement conduits à désigner les vecteurs propres de l'hamiltonien (1.77) sous la forme suivante :

$$\left| \begin{array}{ccc} G^{(1)} & \supset & G^{(2)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma^{(1)} & \eta^{(12)} & \Gamma^{(2)} \gamma^{(2)} \end{array} \right\rangle \quad (1.78)$$

L'énergie associée à un tel vecteur se déduit par ailleurs aisément si les valeurs prises par les invariants de Casimir  $C_p(G^{(1)})$  à l'intérieur de la représentation irréductible  $\Gamma^{(1)}$  sont connues.

En notant  $\langle C_p(G^{(1)}) \rangle_{\Gamma^{(1)}}$  ces valeurs, on a en effet :

$$E = H^{(1)} \left( \left\{ \langle C_p(G^{(1)}) \rangle_{\Gamma^{(1)}} \right\} \right) \quad (1.79)$$

Dans de nombreuses applications physiques, l'hypothèse d'une symétrie parfaite comme celle dont nous venons de discuter s'avère cependant trop forte. Une manière élégante de briser l'invariance consiste alors à introduire dans l'hamiltonien les opérateurs de Casimir d'un sous-groupe. Pour la chaîne  $G^{(1)} \supset G^{(2)}$ , il nous faudra donc écrire :

$$H = H^{(1)} \left( \left\{ \langle C_p(G^{(1)}) \rangle \right\} \right) + H^{(2)} \left( \left\{ \langle C_p(G^{(2)}) \rangle \right\} \right) \quad (1.80)$$

En procédant ainsi,  $H$  ne commute plus généralement qu'avec les transformations de  $G^{(2)}$  et perd par conséquent son insensibilité aux autres éléments de  $G^{(1)}$ . La démarche décrite fait donc passer le groupe de symétrie de  $G^{(1)}$  à  $G^{(2)}$  mais en conservant néanmoins les vecteurs (1.78) comme états propres. En effet, la présence des RI de  $G^{(2)}$  pour désigner ces kets leur permet de diagonaliser comme auparavant l'hamiltonien avec toutefois des énergies associées différentes et précisément données par :

$$E = H^{(1)} \left( \left\{ \langle C_p(G^{(1)}) \rangle_{\Gamma^{(1)}} \right\} \right) + H^{(2)} \left( \left\{ \langle C_p(G^{(2)}) \rangle_{\Gamma^{(2)}} \right\} \right) \quad (1.81)$$

Finalement, la réduction de  $G^{(1)}$  à  $G^{(2)}$  du groupe d'invariance se manifeste simplement par une levée de dégénérescence vis-à-vis des RI de  $G^{(2)}$ . En ce sens même si  $G^{(1)}$  représente maintenant une symétrie brisée, c'est toujours sa structure algébrique qui est à la base des observations que nous venons d'effectuer. Afin de souligner ce rôle prééminent, on précise habituellement qu'un système décrit par l'hamiltonien (1.80) admet un groupe de symétrie dynamique donné par  $G^{(1)}$ , même si son véritable groupe de symétrie est  $G^{(2)}$ .

En dépit de leur nature abstraite, les symétries dynamiques se concrétisent dans une multitude de systèmes physiques. Nous ne souhaitons pas les discuter en détail ici, renvoyant au prochain paragraphe pour un certain nombre d'illustrations. Précisons toutefois que l'effet



Zeeman ou la brisure de la symétrie d'isospin par la répulsion coulombienne dans les noyaux atomiques en sont les manifestations les plus simples [Cas93, Van99].

**Remarques :**

i) Sur le plan pratique, l'utilisation des symétries dynamiques pour modéliser un système nécessite de connaître la réduction des représentations irréductibles d'un groupe en terme des RI de ses sous-groupes (règles de branchement). Malgré l'algorithme formel que nous avons présenté, la solution à ce problème est en général très délicate. Nous donnons néanmoins ci-dessous une liste non exhaustive de quelques réductions connues analytiquement. Signalons également que les décompositions faisant intervenir les algèbres unitaire, orthogonale ou symplectique peuvent être formulées en termes de diverses opérations sur les schémas de Young [Wyb74-appendice] (multiplication, division, pléthysmes) et ont ainsi pu être traduites en codes informatiques fortement utiles [Jui96].

Chaîne de réduction	Règle de branchement
$\begin{array}{ccc} U(N) & \supset & SU(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\lambda_1 \dots \lambda_N] & & [\lambda'_1 \dots \lambda'_{N-1}] \end{array}$	<p>Suppression de toutes les colonnes à <math>N</math> cases du schéma <math>[\lambda]</math>, soit :</p> $\lambda'_n = \lambda_n - \lambda_N \quad (n = 1 \rightarrow N) \quad [\text{Mos68}]$
$\begin{array}{ccc} U(N) & \supset & U(N-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\lambda_1 \dots \lambda_N] & & [\lambda'_1 \dots \lambda'_{N-1}] \end{array}$	<p>Le schéma <math>[\lambda]</math> doit "rentre" dans <math>[\lambda']</math>, c'est-à-dire :</p> $\lambda_n \geq \lambda'_n \geq \lambda_{n+1} \quad [\text{Mos68}]$
$\begin{array}{ccc} SU(3) & \supset & SO(3) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\lambda_1 \lambda_2] & \kappa & J \end{array}$	$\begin{cases} \kappa = \text{Min}(\lambda, \mu), \text{Min}(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1 \text{ ou } 0 \\ J = \kappa, \kappa + 1, \dots, \kappa + \text{Max}(\lambda, \mu) \text{ si } \kappa \neq 0 \\ J = \text{Max}(\lambda, \mu), \text{Max}(\lambda, \mu) - 2, \dots, 1 \text{ ou } 0 \text{ si } \kappa = 0 \end{cases}$ <p>où <math>\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \mu = \lambda_2</math> <span style="float:right">[Ell58]</span></p>
$\begin{array}{ccc} SO(2\Omega) & \supset & SO(2\Omega-1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\sigma_1 \dots \sigma_\Omega) & & (\sigma'_1 \dots \sigma'_{\Omega-1}) \end{array}$	$\sigma_1 \geq \sigma'_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma'_2 \geq \dots \geq \sigma_{\Omega-1} \geq \sigma'_{\Omega-1} \geq  \sigma_\Omega  \quad [\text{Cha68}]$
$\begin{array}{ccc} SO(2\Omega+1) & \supset & SO(2\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\sigma_1 \dots \sigma_\Omega) & & (\sigma'_1 \dots \sigma'_\Omega) \end{array}$	$\sigma_1 \geq \sigma'_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma'_2 \geq \dots \geq \sigma'_{\Omega-1} \geq \sigma_\Omega \geq  \sigma'_\Omega  \quad [\text{Cha68}]$

(1.82)

**NB :** Le groupe orthogonal doit bien sur être remplacé par son groupe de recouvrement si les représentations mises en jeu le nécessitent.



ii) En accord avec les arguments généraux développés au paragraphe II-4, la classification (1.43) des états propres de l'hamiltonien en présence d'une symétrie dynamique s'applique également au niveau des opérateurs tensoriels qui sont souvent responsables des transitions entre ces états. Ces opérateurs seront alors logiquement notés  $O_{\eta^{(12)}\Gamma^{(2)}\gamma^{(2)}}^{\Gamma^{(1)}}$  et leurs éléments de matrice entre 2 états  $\left| \Gamma_i^{(1)} \left( \eta_i^{(12)} \Gamma_i^{(2)} \gamma_i^{(2)} \right) \right\rangle$  et  $\left| \Gamma_f^{(1)} \left( \eta_f^{(12)} \Gamma_f^{(2)} \gamma_f^{(2)} \right) \right\rangle$  de la base (1.78) pourront s'évaluer en utilisant le théorème de Wigner-Eckart (1.63). Dans ce contexte, il conviendra néanmoins de connaître différents coefficients de couplage de la forme  $\left\langle \Gamma_i^{(1)} \left( \eta_i^{(12)} \Gamma_i^{(2)} \gamma_i^{(2)} \right); \Gamma^{(1)} \left( \eta^{(12)} \Gamma^{(2)} \gamma^{(2)} \right) \middle| \omega^{(1)} \Gamma_f^{(1)} \left( \eta_f^{(12)} \Gamma_f^{(2)} \gamma_f^{(2)} \right) \right\rangle$ ,  $\omega^{(1)}$  représentant l'indice de multiplicité lié à la présence éventuelle de plusieurs RI  $\Gamma_f^{(1)}$  dans la série de Clebsch-Gordan  $\Gamma_i^{(2)} \otimes \Gamma^{(2)}$ . En fait, l'évaluation de ces coefficients relatifs au groupe principal  $G^{(1)}$  est souvent facilitée par l'utilisation du lemme de Racah qui permet de les exprimer en fonction de leurs homologues dans le sous groupe  $G^{(2)}$  [Wyb74-chapitre 19] :

$$\left\langle \Gamma_i^{(1)} \left( \eta_i^{(12)} \Gamma_i^{(2)} \gamma_i^{(2)} \right); \Gamma^{(1)} \left( \eta^{(12)} \Gamma^{(2)} \gamma^{(2)} \right) \middle| \omega^{(1)} \Gamma_f^{(1)} \left( \eta_f^{(12)} \Gamma_f^{(2)} \gamma_f^{(2)} \right) \right\rangle = \dots$$

$$\sum_{\omega^{(2)}} \left\langle \begin{matrix} \Gamma_i^{(1)} & \Gamma^{(1)} \\ \eta_i^{(12)} \Gamma_i^{(2)} & \eta^{(12)} \Gamma^{(2)} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \omega^{(1)} \Gamma_f^{(1)} \\ \omega^{(2)} \Gamma_f^{(2)} \end{matrix} \right\rangle \left\langle \Gamma_i^{(2)} \gamma_i^{(2)}; \Gamma^{(2)} \gamma^{(2)} \middle| \omega^{(2)} \Gamma_f^{(2)} \gamma_f^{(2)} \right\rangle \quad (1.83)$$

où  $\omega^{(2)}$  est encore une fois un indice de multiplicité nécessaire si le produit tensoriel  $\Gamma_i^{(2)} \otimes \Gamma^{(2)}$  fait apparaître plusieurs représentations  $\Gamma_f^{(2)}$  et où les quantités  $\left\langle \begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix} \middle| \cdot \right\rangle$  sont connues sous le nom de facteurs isoscalaires.

---

## IV - Exemples d'implémentation

---

### ❶ Formule de masse des hadrons

La physique des particules constitue sans aucun doute l'un des domaines où la théorie des groupes a été source de progrès. Son utilisation a bien sûr conduit au développement des théories de jauge mais a également permis sur un plan plus phénoménologique d'expliquer en terme de brisure dynamique d'une symétrie interne les multiplets de particules observés expérimentalement. C'est précisément ce dernier point que nous souhaitons illustrer ici en considérant le modèle de Gell-Mann et Ne'eman des hadrons [Gel64] basé sur l'introduction d'un groupe  $SU(3)$ . Aujourd'hui ce groupe est en fait appelé  $SU_f(3)$  ou  $SU(3)$  de saveur pour le différencier de celui qui intervient au niveau de la couleur des quarks et qui constitue le groupe de jauge de l'interaction forte. Plus précisément, l'approche  $SU_f(3)$  se propose de



réunir dans une même représentation irréductible  $[\lambda_1, \lambda_2]$  des multiplets d'isospin de masses proches. Rappelons que ces multiplets sont formés de particules ayant des masses quasiment égales et ne différant au niveau de leurs autres caractéristiques intrinsèques que par la charge électrique. Mathématiquement, on leur associe un nombre quantique  $T$  défini de façon à pouvoir caractériser chacune des particules qui les composent par une valeur  $M_T = -T, -T+1, \dots, T-1, T$  : par exemple, les nucléons forment un doublet d'isospin  $T = 1/2$  avec de façon arbitraire  $M_T = 1/2$  pour le proton et  $M_T = -1/2$  pour le neutron (convention de la physique des particules). De la même manière, les 3 baryons  $\Sigma^{-,0,+}$  sont associés à  $T = 1$  avec respectivement  $M_T = -1, 0, 1$  pour  $\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+$ . Du point de vue algébrique, les vecteurs  $|T, M_T\rangle$  permettent en parfaite analogie avec le moment cinétique  $\vec{J}$  de définir 3 opérateurs  $T_x, T_y, T_z$  formant l'algèbre de Lie d'un groupe  $SU_T(2)$  dont les RI sont naturellement caractérisées par le schéma de Young  $[2T]$ . Chaque projection  $M_T$  est alors associée à une représentation irréductible du sous groupe  $SO_T(2)$  que génère la composante  $T_z$ . Dans le contexte plus général du groupe  $SU_f(3)$ , une seule classification est en fait à même de préserver les labels  $(T, M_T)$  et correspond à la chaîne de réduction :

$$\left| \begin{array}{ccccccc} SU_f(3) & \supset & U_Y(1) & \otimes & SU_T(2) & \supset & U_Y(1) \otimes SO_T(2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\lambda_1, \lambda_2] & & Y & & T & & M_T \end{array} \right\rangle \quad (1.84)$$

où l'algèbre du groupe  $U_Y(1)$  est formée d'un seul opérateur s'identifiant à l'hypercharge [Ell79] et qui commute avec toutes les observables d'isospin. Les RI de ce groupe sont en outre définies par le nombre quantique d'hypercharge  $Y$  relié à la charge électrique  $Q$  par formule de Gell-Mann Nishijima :

$$Q = \frac{1}{2}Y + M_T \quad (1.85)$$

Précisons également que le groupe  $U_Y(1) \otimes SU_T(2)$  mentionné dans (1.84) correspond à l'ensemble des transformations obtenues en multipliant les opérateurs de  $U_Y(1)$  par ceux de  $SU_T(2)$ , la structure de groupe étant assurée par la commutativité des générateurs des 2 algèbres mises en jeu. Par ailleurs, tout espace irréductible vis-à-vis du produit  $U_Y(1) \otimes SU_T(2)$  vérifie nécessairement ce même critère pour chacun des 2 groupes et en conséquence sera caractérisé par un couple  $(Y, T)$  comme indiqué dans (1.84). La même discussion s'applique évidemment à  $U_Y(1) \otimes SO_T(2)$ .

Sur le plan physique, les états (1.84) diagonalisent n'importe quelle fonction des opérateurs de Casimir des différents groupes de la chaîne de réduction. En adoptant pour l'hamiltonien au repos la forme la plus simple, c'est-à-dire une combinaison linéaire d'invariants d'ordre 2 au maximum, l'énergie de masse  $E_o$  des hadrons d'une même représentation irréductible de  $SU_f(3)$  s'écrira :

$$E_o = a + bY + b'Y^2 + cT(T+1) + dM_T + d'M_T^2 \quad (1.86)$$

$a, b, b', c, d, d'$  étant des constantes. Habituellement on pose de plus  $b' = -c/4$ , cette hypothèse revenant à conférer à l'interaction forte, un caractère tensoriel spécifique en  $SU_f(3)$  [Ell79,



Gel62, Oku62]. La relation précédente (1.86) prend alors la forme suivante, connue sous le nom de formule de masse d'Okubo-Gell-Mann :

$$E_o = a + bY + c \left[ T(T+1) - \frac{1}{4}Y^2 \right] + dM_T + d' M_T^2 \quad (1.87)$$

Concrètement, cette paramétrisation s'est avérée apte à reproduire avec une excellente précision les masses des hadrons confirmant ainsi la pertinence de la classification dynamique (1.84). La figure (1.1) ci-dessous en est une illustration dans le cas du proton, du neutron et des particules  $\Lambda, \Sigma, \Xi$  pour lesquels les valeurs des nombres quantiques  $(Y, T, M_T)$  conduisent à un regroupement dans la représentation  $[2, 1]$  du groupe  $SU_f(3)$ .

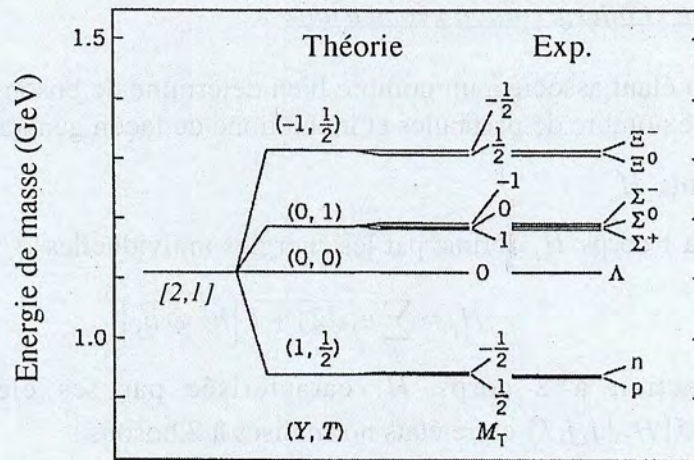


Figure 1.1 : Spectre de masse de l'octet  $[2, 1]$  du groupe  $SU_f(3)$  obtenu grâce à (1.87) avec des paramètres donnés en MeV par  $a = 1111.3$ ,  $b = -189.6$ ,  $c = -39.9$ ,  $d = -3.8$  et  $d' = 0.9$ . La colonne de gauche correspond à une symétrie  $SU_f(3)$  exacte qui prédit l'égalité de toutes les masses à l'intérieur de l'octet et les 2 suivantes à des brisures dynamiques de cette symétrie.

## ② Structure collective des noyaux : modèle IBM

Comme tous les systèmes formés d'un grand nombre de particules en interaction, le noyau atomique ne peut s'appréhender dans le cadre quantique que par des approximations judicieuses permettant d'obtenir ses caractéristiques essentielles à partir d'un problème restreint plus aisément soluble. Une illustration particulièrement intéressante vis-à-vis de la théorie des groupes de ce genre d'approches est fournie par le modèle des bosons en interaction (IBM) de Arima et Iachello [Ari75]. Son objectif premier est d'élucider les états collectifs de basse énergie des noyaux pair-pair en termes de bosons  $b_{j,m}^+$  ( $m = -j \rightarrow j$ )



caractérisés par un moment cinétique  $j=0$  (boson monopolaire  $s^+$ ) ou  $j=2$  (boson quadrupolaire  $d_m^+$ ). Rapidement, il a par ailleurs été constaté que ces bosons pouvaient s'interpréter comme des paires de nucléons identiques [Ari77], le choix des degrés de liberté  $j=0,2$  se justifiant alors par le caractère attractif à courte portée de l'interaction nucléaire résiduelle [Tal93-chapitre 11]. En conséquence, un noyau pair-pair à  $2N$  nucléons de valence sera donc décrit en IBM par un état corrélé de  $N$  bosons. Signalons de plus que dans la version originale (IBM-1) à laquelle nous nous limitons pour l'instant, aucune distinction n'est introduite entre les bosons formés de protons et ceux constitués de neutrons. De plus l'absence de paires mixtes limite a priori l'applicabilité du modèle aux noyaux pour lesquels protons et neutrons n'occupent pas la même couche de valence.

### a- Hamiltonien et interprétation géométrique

Chaque noyau étant associé à un nombre bien déterminé de bosons, l'hamiltonien IBM se doit de conserver le nombre de particules et inclut donc de façon générale :

- une constante  $H_0$
- une partie à 1 corps  $H_1$  définie par les énergies individuelles  $\varepsilon_j$  de chaque boson :

$$H_1 = \sum_j \varepsilon_j \sqrt{2j+1} \left[ b_j^+ \otimes \tilde{b}_j \right]_0^0 \quad (1.88)$$

- une interaction à 2 corps  $H_2$  caractérisée par ses éléments de matrice  $v_{j_1 j_2 j_3 j_4}^J = \langle j_1 j_2 J | H_2 | j_3 j_4 J \rangle$  entre états normalisés à 2 bosons :

$$H_2 = \sum_{\substack{j_1 \leq j_2 \\ j_3 \leq j_4 \\ J}} \frac{v_{j_1 j_2 j_3 j_4}^J \sqrt{2J+1}}{\sqrt{(1+\delta_{j_1 j_2})(1+\delta_{j_3 j_4})}} \left[ \left[ b_{j_1}^+ \otimes b_{j_2}^+ \right]^J \otimes \left[ \tilde{b}_{j_3} \otimes \tilde{b}_{j_4} \right]^J \right]_0^0 \quad (1.89)$$

Dans le cas présent, seules 7 interactions  $v$  sont d'ailleurs à considérer en raison de l'hermiticité de  $H_2$  et du couplage nécessairement symétrique des 2 bosons qui restreint leurs états à  $|s^2, J=0\rangle$ ,  $|sd, J=2\rangle$  et  $|d^2, J=0,2,4\rangle$ .

- d'éventuelles contributions d'ordre supérieur.

Finalement, en se limitant aux termes à 2 corps, 10 paramètres caractérisent donc cet hamiltonien, mais seulement 6 influent sur les énergies d'excitation. Nous verrons par ailleurs que la diagonalisation peut s'avérer analytique pour des interactions particulières grâce au développement de symétries dynamiques.

Un autre aspect intéressant des hamiltoniens IBM réside dans leur aptitude à fournir des images géométriques de la spectroscopie à laquelle ils donnent naissance. La procédure générale pour parvenir à ces images repose en fait sur un passage à la limite classique grâce à l'introduction d'états cohérents donnés par [Boh80, Die80, Gin80] :

$$|\mathcal{N}, \beta, \gamma\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}!}} \left[ s^+ + \beta \cos \gamma d_0^+ + \frac{\beta \sin \gamma}{\sqrt{2}} (d_2^+ + d_{-2}^+) \right]^{\mathcal{N}} | \rangle \quad (1.90)$$



C'est précisément par l'intermédiaire de  $\beta$  et  $\gamma$  que s'opère la connexion avec une description macroscopique en terme de goutte liquide présentant des déformations quadrupolaires. Rappelons que dans ce contexte, la surface nucléaire est représentée par un ellipsoïde dont la longueur  $R_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) de chacun des axes principaux est paramétrée selon l'équation :

$$R_k = R_o \left[ 1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_{BM} \cos \left( \gamma_{BM} - \frac{2k\pi}{3} \right) \right], \quad (1.91)$$

$R_o$  étant le rayon de la forme sphérique et  $(\beta_{BM}, \gamma_{BM})$  les variables de Bohr et Mottelson [Boh75]. A l'issue de plusieurs travaux [Boh80, Die80, Gin80], il est en effet apparu que les paramètres  $(\beta, \gamma)$  ont la même signification physique que  $(\beta_{BM}, \gamma_{BM})$  à la différence près que les premiers se réfèrent aux nucléons de valence alors que les seconds correspondent à l'ensemble du noyau. Il en résulte concrètement [Gin80] :

$$\gamma_{BM} = \gamma \text{ et de façon approchée } \beta_{BM} \approx 2.36 \mathcal{N} \beta / A \quad (1.92)$$

Pratiquement, la détermination de la forme d'équilibre associée à un hamiltonien IBM-1 quelconque  $H$  repose sur un calcul variationnel consistant à minimiser la valeur moyenne  $E(\mathcal{N}, \beta, \gamma)$  de  $H$  dans l'état cohérent (1.90). Précisons qu'une forme analytique de cette énergie classique peut par ailleurs aisément être obtenue en fonction des énergies individuelles et des interactions qui caractérisent  $H$ . En supposant qu'aucun terme d'ordre supérieur à 2 intervient, on a ainsi [Van81] :

$$E(\mathcal{N}, \beta, \gamma) = H_o + \frac{\mathcal{N}}{1 + \beta^2} (\epsilon_s + \epsilon_d \beta^2) + \frac{\mathcal{N}(\mathcal{N} - 1)}{1 + \beta^2} (f_1 \beta^4 + f_2 \beta^3 \cos 3\gamma + f_3 \beta^2 + f_4) \quad (1.93)$$

avec  $f_1 = \frac{1}{10} v_{dddd}^0 + \frac{1}{7} v_{dddd}^2 + \frac{9}{35} v_{dddd}^4$ ,  $f_2 = -\frac{2}{\sqrt{35}} v_{sddd}^2$ ,  $f_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} (v_{ssdd}^0 + v_{sdsd}^2)$  et  $f_4 = \frac{1}{2} v_{ssss}^0$ .

En conséquence, la minimisation de cette fonctionnelle par rapport à  $\gamma$  conduit nécessairement à  $\gamma = 0$  ou  $\gamma = \pi/3$  de sorte qu'aucune structure triaxiale ne peut être décrite en IBM-1 par des interactions à 2 corps.

### b- Symétries dynamiques

En traitant le noyau comme un système de  $\mathcal{N}$  bosons identiques pouvant chacun accéder à 6 états individuels  $|j, m\rangle$  ( $j = 0, 2$ ;  $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ ), l'espace des états quantiques en IBM-1 s'identifie nécessairement à représentation irréductible totalement symétrique  $[\mathcal{N}]$  du groupe  $U(6)$  généré par les produits bilinéaires  $b_{j_1 m_1}^+ b_{j_2 m_2}$ . Conformément à la discussion générale du paragraphe III, la mise en évidence de symétries dynamiques repose alors l'identification d'algèbres de Lie pouvant être incluses les unes dans les autres. Cependant, afin de préserver l'invariance par rotation dans notre espace physique, les chaînes acceptables devront nécessairement se terminer par le groupe  $SO(3)$  généré par les



observables de moment cinétique  $J_x, J_y, J_z$  dont l'expression en termes des bosons IBM-1 est donnée par :

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(J_{-1} - J_1), \quad J_y = \frac{i}{\sqrt{2}}(J_{-1} + J_1) \quad \text{et} \quad J_z = J_0$$

$$\text{où } J_\mu = \sqrt{10} \left[ d^+ \otimes \tilde{d} \right]_\mu^J \quad (\mu = -1, 0, 1) \quad (1.94)$$

En définitive, toute base IBM-1 exhibant une invariance dynamique sera donc de la forme :

$$\left| \begin{array}{c} U(6) \supset \dots \supset SO(3) \\ \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ [\mathcal{N}] \quad \quad \quad JM \end{array} \right\rangle \quad (1.95)$$

En fait, seules 3 réductions algébriques sont en mesure d'assurer une telle classification et s'écrivent [Iac87a-chapitre 2, Fra94-chapitre 8] :

$$U(6) \supset \left\{ \begin{array}{l} U(5) \supset SO(5) \\ SU(3) \\ SO(6) \supset SO(5) \end{array} \right\} \supset SO(3) \quad (1.96)$$

où des générateurs possibles pour les groupes  $U(5)$ ,  $SU(3)$ ,  $SO(6)$  et  $SO(5)$  sont indiqués dans le tableau suivant :

$U(5)$	$\left\{ \left[ d^+ \otimes \tilde{d} \right]_M^J \right\}_{\substack{J=0 \rightarrow 4 \\ M=-J \rightarrow J}}$	$Q_\mu^x$ ( $\mu = -2 \rightarrow 2$ ) désignant les composantes du moment quadrupolaire en IBM-1, soit :
$SU(3)$	$\{ Q_\mu^{x=\pm\sqrt{7}/2} \}_{\mu=-2 \rightarrow 2}, \{ J_\mu \}_{\mu=-1 \rightarrow 1}$	
$SO(6)$	$\{ Q_\mu^{x=0} \}_{\mu=-2 \rightarrow 2}, \left\{ \left[ d^+ \otimes \tilde{d} \right]_M^J \right\}_{\substack{J=1,3 \\ M=-J \rightarrow J}}$	$Q_\mu^x = \left[ s^+ \otimes \tilde{d} + d^+ \otimes \tilde{s} \right]_\mu^2 + \chi \left[ d^+ \otimes \tilde{d} \right]_\mu^2,$ avec $\chi$ un paramètre libre
$SO(5)$	$\left\{ \left[ d^+ \otimes \tilde{d} \right]_M^J \right\}_{\substack{J=1,3 \\ M=-J \rightarrow J}}$	

En calculant grâce aux relations générales (1.28) et (1.39) les opérateurs de Casimir de tous les groupes que nous venons de mentionner [Iac87a-chapitre 2], il apparaît alors qu'un hamiltonien quelconque  $H$  avec des interactions à 2 corps au maximum peut toujours s'écrire comme une combinaison linéaire de ces invariants :

$$H = H_0 + \eta_0 + \eta_1 C_1[U(6)] + \eta_2 C_2[U(6)] + \kappa_1 C_1[U(5)] + \kappa_2 C_2[U(5)] + \dots$$

$$\kappa_3 C_2[SU(3)] + \kappa_4 C_2[SO(6)] + \kappa_5 C_2[SO(5)] + \kappa_6 C_2[SO(3)] \quad (1.97)$$

les 9 paramètres  $\eta, \kappa$  s'exprimant linéairement en fonction des énergies individuelles  $\varepsilon$  et des éléments de matrice d'interaction  $v$  qui caractérisent  $H$  [cf. équations (1.88-89)]. En dépit de leur définition abstraite, certains des invariants  $C_1, C_2$  s'expriment très simplement dans l'espace des bosons  $s$  et  $d$ . C'est par exemple le cas de ceux du groupe  $U(6)$  qui sont en fait de simples fonctions du nombre de bosons  $\mathcal{N}$  qu'il est aisé d'obtenir en utilisant (1.39) :



$C_1[U(6)] = \hat{N}$  et  $C_2[U(6)] = \hat{N}(\hat{N} + 5)$ . Il devient alors possible de regrouper dans une même fonction  $\kappa_o(\hat{N}) = H_o + \eta_o + \eta_1 \hat{N} + \eta_2 \hat{N}(\hat{N} + 5)$  l'ensemble des termes qui ne contribuent qu'à l'énergie de liaison, et donc d'écrire :

$$H(\{\kappa_n\}) = \kappa_o(\hat{N}) + \kappa_1 C_1[U(5)] + \kappa_2 C_2[U(5)] + \kappa_3 C_2[SU(3)] + \dots \\ \kappa_4 C_2[SO(6)] + \kappa_5 C_2[SO(5)] + \kappa_6 C_2[SO(3)] \quad (1.98)$$

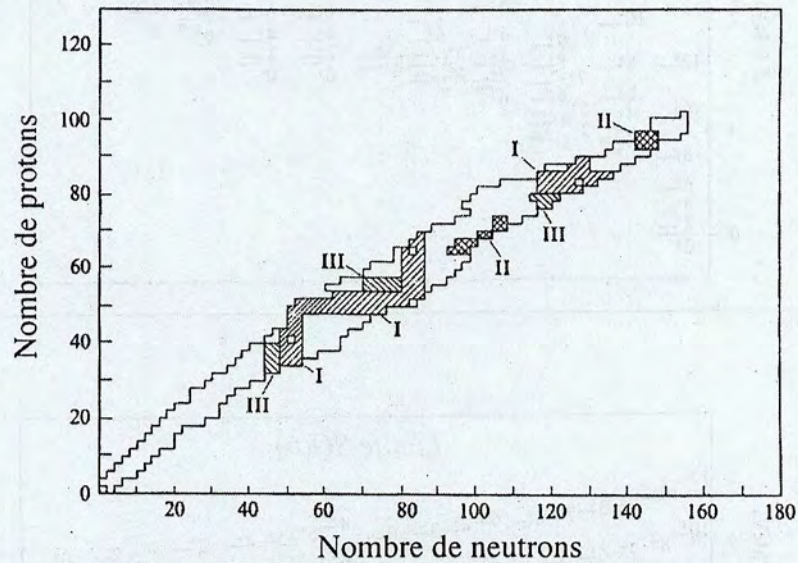
Chacune des limites définies par (1.96) correspond donc simplement à la nullité de certains coefficients  $\kappa_n$  :

$$H[U(5)] = \kappa_o(\hat{N}) + \kappa_1 C_1[U(5)] + \kappa_2 C_2[U(5)] + \kappa_5 C_2[SO(5)] + \kappa_6 C_2[SO(3)]$$

$$H[SU(3)] = \kappa_o(\hat{N}) + \kappa_3 C_2[SU(3)] + \kappa_6 C_2[SO(3)]$$

$$H[SO(6)] = \kappa_o(\hat{N}) + \kappa_4 C_2[SO(6)] + \kappa_5 C_2[SO(5)] + \kappa_6 C_2[SO(3)] \quad (1.99)$$

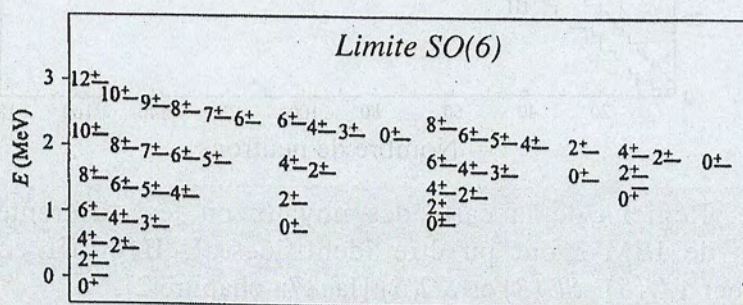
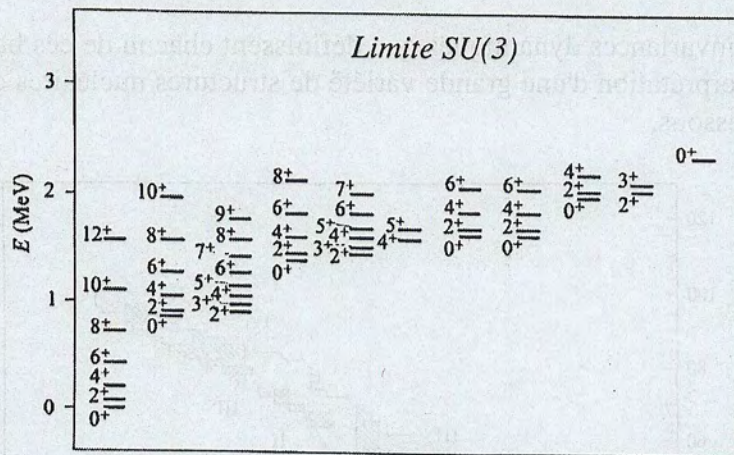
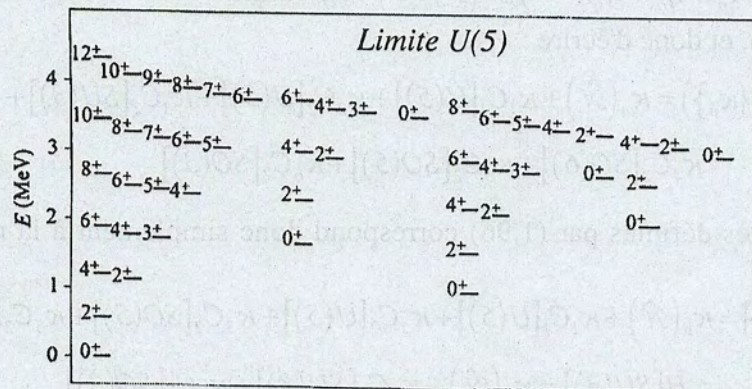
Concrètement, les invariances dynamiques que définissent chacun de ces hamiltoniens se sont illustrées dans l'interprétation d'une grande variété de structures nucléaires comme indiqué sur la figure (1.2) ci-dessous.



**Figure 1.2 :** Régions de la carte des noyaux où les différentes symétries dynamiques de IBM-1 ont pu être identifiées. I, II et III correspondent respectivement à  $U(5)$ ,  $SU(3)$  et  $SO(6)$  [Iac87a-chapitre 2].

Enfin, plutôt que de donner une description détaillée des nombres quantiques et règles de branchement impliqués dans chacune des limites, nous avons simplement représenté sur la figure (1.3) les spectres schématisés qui leur correspondent renvoyant à la référence [Iac87a-chapitre 2] pour une discussion plus détaillée (La procédure pour établir ces spectres sera illustrée dans le modèle plus simple du vibron au paragraphe IV-3)



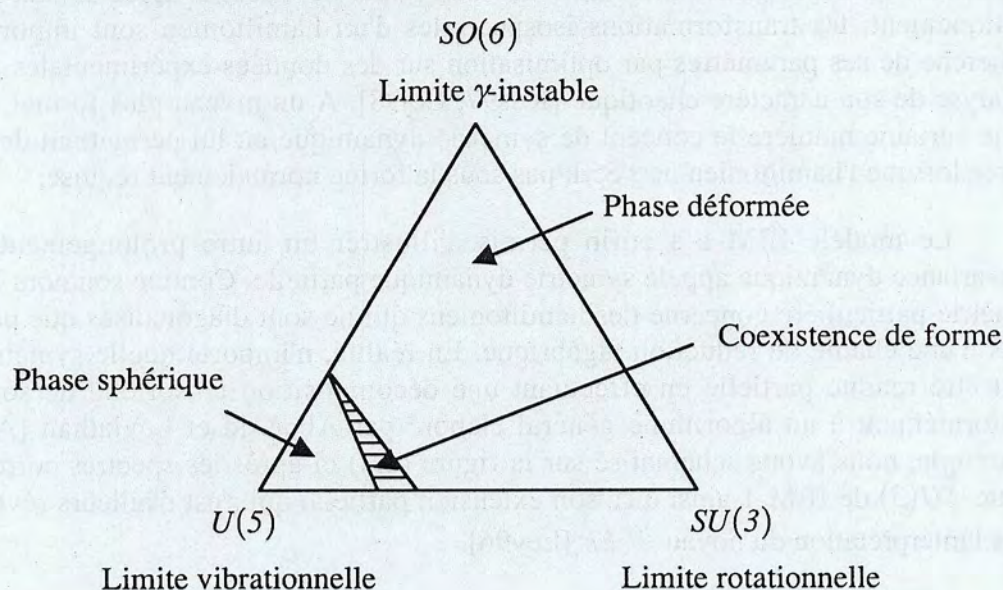


**Figure 1.3 :** Spectres associés à chaque chaîne de réduction du modèle IBM-1 dans le cas d'un système comportant  $N=6$  bosons [Iac87a-chapitre 2]



Sur le plan géométrique, la forme explicite des opérateurs de Casimir des algèbres du modèle IBM-1 couplée à l'expression (1.93) de l'énergie classique permet en plus d'associer à chacune des chaînes de réduction une interprétation géométrique simple : les noyaux  $U(5)$ ,  $SU(3)$  et  $SO(6)$  correspondent en effet respectivement à des géométries sphériques, déformées à symétrie axiale et  $\gamma$ -instable [Iac87a-chapitre 3.4].

Toutes les considérations qui viennent d'être évoquées à propos des symétries et de la forme d'équilibre des noyaux en IBM-1 sont habituellement synthétisées sous forme graphique par l'intermédiaire du triangle de Casten [Cas81]. Chaque hamiltonien y est alors associé à un point correspondant au barycentre des sommets affectés de poids égaux aux coefficients  $(\kappa_1, \kappa_3, \kappa_4)$  qui mesurent l'importance des 3 limites. Ce triangle est représenté sur la figure suivante où nous avons également mentionné une zone de coexistence de phase récemment mise en évidence par Iachello & al [Iac98] :



### c- Symétries cachées et partielles

Comme nous venons de le voir, la mise en exergue des symétries dynamiques du modèle IBM-1 repose sur la possibilité de décrire le noyau par des énergies individuelles et des interactions particulières qui annulent certains des coefficients  $\kappa_n$  du développement général (1.98). La réciproque n'est néanmoins pas nécessairement vraie : même si tous les paramètres  $\kappa_n$  sont non nuls, l'hamiltonien peut révéler une invariance "cachée" en raison de l'existence de transformations unitaires  $u$  qui préservent le spectre tout en altérant les variables  $\kappa_n$ . Une procédure systématique pour identifier de telles transformations a récemment été proposée par Shirokov & al [Shi98] et a permis de mettre en évidence qu'en IBM-1 deux possibilités existent, à savoir :

➤ Si  $\kappa_3 \neq 0$ ,  $u^{-1}s^+u = s^+$  et  $u^{-1}d^+u = -d^+$  impliquant pour l'hamiltonien (1.98) :



$$u^{-1} H(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6) u = \dots$$

$$H(\kappa_0, \kappa_1 + 2\kappa_3, \kappa_2 + 2\kappa_3, -\kappa_3, \kappa_4 + 4\kappa_3, \kappa_5 - 6\kappa_3, \kappa_6 + 2\kappa_3) \quad (1.100)$$

➤ Si  $\kappa_3 = 0$ ,  $u^{-1} s^+ u = s^+$  et  $u^{-1} d^+ u = i d^+$  entraînant alors :

$$u^{-1} H(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, 0, \kappa_4, \kappa_5, \kappa_6) u = \dots$$

$$H(\kappa_0 + 10\kappa_4, \kappa_1 + 4\kappa_4(\mathcal{N} + 2), \kappa_2 - 4\kappa_4, 0, -\kappa_4, \kappa_5 + 2\kappa_4, \kappa_6) \quad (1.101)$$

*NB* : Ces relations sont valables pour les invariants utilisés dans la référence [Fra94].

En conséquence, si l'on a par exemple  $\kappa_1 = \kappa_2 = -2\kappa_3$ ,  $\kappa_4 = -4\kappa_3$  et  $\kappa_5 = 6\kappa_3$  ( $\kappa_3 \neq 0$ ) l'hamiltonien aura un spectre caractéristique de la symétrie dynamique  $SU(3)$  bien que son expression de départ fasse intervenir des invariants de Casimir associés aux autres limites. Pratiquement, les transformations isospectrales d'un hamiltonien sont importantes dans la recherche de ses paramètres par optimisation sur des données expérimentales ainsi que dans l'analyse de son caractère chaotique [Kus97, Cej98]. A un niveau plus formel, elles étendent d'une certaine manière le concept de symétrie dynamique en lui permettant de se manifester même lorsque l'hamiltonien ne s'écrit pas sous la forme normalement requise.

Le modèle IBM-1 a enfin permis d'illustrer un autre prolongement de la notion d'invariance dynamique appelé symétrie dynamique partielle. Comme son nom l'indique, cette symétrie particulière concerne des hamiltoniens qui ne sont diagonalisés que par certains des états d'une chaîne de réduction algébrique. En réalité, n'importe quelle symétrie dynamique peut être rendue partielle en effectuant une décomposition tensorielle de son hamiltonien conformément à un algorithme général élaboré par Alhassid et Leviathan [Alh92]. A titre d'exemple, nous avons schématisé sur la figure (1.4) ci-après les spectres correspondant à la limite  $SU(3)$  de IBM-1 ainsi qu'à son extension partielle qui s'est d'ailleurs révélée pertinente dans l'interprétation du noyau  $^{168}\text{Er}$  [Lev96].

#### d- Autres modèles IBM

En raison de son pouvoir descriptif, le modèle IBM-1 dont nous venons de discuter, a progressivement été généralisé de manière à pouvoir fournir une spectroscopie enrichie des noyaux auquel il s'applique ou de façon à appréhender des systèmes plus complexes.

Pour les noyaux où protons et neutrons n'occupent pas la même couche de valence et qui entrent dans le cadre IBM-1, une extension naturelle consiste à considérer séparément les paires formées de protons (bosons  $\pi$ ) et celles formées de neutrons (bosons  $\nu$ ). Le modèle IBM-2 [Ari77, Ots78] qui en résulte décrira donc un noyau possédant  $2\mathcal{N}_\pi$  protons de valence et  $2\mathcal{N}_\nu$  neutrons de valence comme un système formé de  $\mathcal{N}_\pi$  bosons  $b_{\pi,j,m}^+$  et de  $\mathcal{N}_\nu$  bosons  $b_{\nu,j,m}^+$  ( $j = 0, 2$ ;  $m = -j \rightarrow j$ ) tous en interaction. Du point de vue algébrique, IBM-2 se caractérise ainsi par le groupe produit  $U_\pi(6) \otimes U_\nu(6)$  des 2 algèbres  $U(6)$  formées par les générateurs  $b_{\pi,j_1,m_1}^+ b_{\pi,j_2,m_2}$  et  $b_{\nu,j_1,m_1}^+ b_{\nu,j_2,m_2}$  respectivement associés aux protons et aux



neutrons. En outre, les états du système devront nécessairement adopter un comportement totalement symétrique dans les permutations des bosons de chaque fluide et en conséquence ils se transformeront vis-à-vis des groupes  $U_\pi(6)$  et  $U_\nu(6)$  selon les RI  $[\mathcal{N}_\pi]$  et  $[\mathcal{N}_\nu]$ . Compte tenu de l'invariance par rotation, ces états s'écriront donc de façon générale :

$$\left| \begin{array}{ccc} U_\pi(6) \otimes U_\nu(6) \supset \dots \supset SO(3) \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ [\mathcal{N}_\pi] \quad [\mathcal{N}_\nu] \quad \eta \quad J, M \end{array} \right\rangle \quad (1.102)$$

L'analyse des symétries dynamiques susceptibles d'émerger d'un tel schéma de classification s'avère nettement plus complexe qu'en IBM-1 mais a quand même pu être menée à son terme. [Fra94-chapitre 9.4]. Concrètement, l'approche IBM-2 s'avère capable de fournir une description phénoménologique des états collectifs de presque tous les noyaux stables pair-pair de masse moyenne ou élevée [cf. article de synthèse Lip90]. De plus, la possibilité de déduire son hamiltonien à partir du modèle en couches [Iac87b, All88] lui confère également un fondement microscopique.

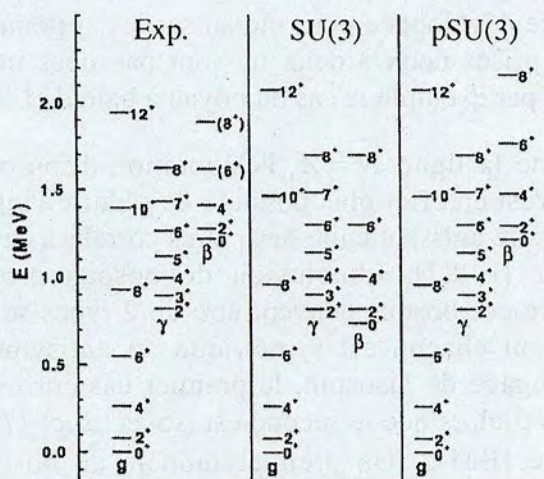


Figure 1.4 : Illustration du concept de symétrie dynamique partielle dans le cas de la limite  $SU(3)$  de IBM-1. Pour un hamiltonien préservant dynamiquement  $SU(3)$ , les états de même moment cinétique des bandes  $\beta$  et  $\gamma$  sont dégénérés. Avec la symétrie partielle  $pSU(3)$  cette dégénérescence est levée en détruisant le caractère analytique des états  $\beta$  par mélange des RI de  $SU(3)$ . Un exemple de réalisation du schéma  $pSU(3)$  est enfin montré dans le cas du noyau  $^{168}\text{Er}$ .

Outre IBM-2 que nous venons brièvement d'évoquer, deux autres modèles nucléaires en bosons consistant à coupler des algèbres  $U(6)$  du type IBM-1 ont jusqu'à présent été proposés. Le premier concerne les noyaux où il est nécessaire de prendre en compte les excitations du coeur. C'est en particulier le cas si un type de nucléon occupe une couche fermée ou quasiment fermée alors que l'autre se situe en milieu de couche : des états intrus



apparaissent alors à des énergies comparables à celles des excitations usuelles dans l'espace de valence. Il devient donc indispensable d'introduire 2 sortes de bosons, à savoir ceux qui correspondent à des paires corrélées de particules dans les couches de valence (bosons  $p$ ) et ceux qui sont associés à des paires collectives de trous dans les couches du cœur (bosons  $h$ ). En se restreignant aux degrés de liberté  $J = 0, 2$  pour toutes ces paires, on aboutit aux approches EIBM (Extended Interacting Boson Model) dont la plus simple version est caractérisée par la structure algébrique  $U_p(6) \otimes U_h(6)$ . Une discussion détaillée ainsi que des exemples d'application pourront être trouvés dans la référence [Hey92].

Dans un contexte totalement différent, des descriptions IBM pour les noyaux exotiques très riches en neutrons ont également été envisagées. Pour ces systèmes, certains calculs microscopiques prédisent en effet l'existence d'une peau de neutrons reflétant une étendue spatiale plus importante pour la densité de neutrons que pour celle des protons. Une étude algébrique peut alors être menée en effectuant le produit de 3 algèbres  $U(6)$  respectivement associées aux bosons formés de protons ( $\pi$ ), à ceux constitués de neutrons du cœur ( $\nu_c$ ) et enfin à ceux composés de neutrons de la peau ( $\nu_s$ ), soit  $U_\pi(6) \otimes U_{\nu_c}(6) \otimes U_{\nu_s}(6)$  [War97]. Signalons enfin, qu'une généralisation de ce genre de description utilisant des algèbres non compactes pourrait être développée pour modéliser les systèmes borroméens caractérisés par des composantes qui prises deux à deux ne sont pas liées mais qui considérées dans leur ensemble le sont (c'est par exemple le cas du noyau à halo de Lithium 11).

Au voisinage de la ligne  $N = Z$ , l'élaboration d'approches en bosons se complique considérablement. Il n'est en effet plus possible de réduire l'interaction proton-neutron à une composante quadrupolaire agissant entre des paires corrélées de protons et de neutrons comme on le fait en IBM-2 [Ell87]. L'inclusion de bosons proton-neutron devient en fait indispensable. En outre ces bosons peuvent être de 2 types selon que le vecteur d'état de la paire qu'ils représentent chacun est symétrique ou antisymétrique dans l'échange des 2 particules. Dans le langage de l'isospin, le premier cas correspond à un état isoscalaire de nombre quantique  $T = 0$  alors que le second est isovectoriel ( $T = 1$ ) et se rapproche ainsi des bosons  $p-p$  ou  $n-n$  de IBM-2. Un premier modèle de bosons en interaction préservant l'invariance en isospin peut alors simplement s'obtenir à partir de IBM-2 en ajoutant des bosons proton-neutron de manière à obtenir l'intégralité du triplet  $T = 1$  dans chacune des voies  $J = 0, 2$ . Le modèle IBM-3 ainsi obtenu a été proposé et intensivement étudié par Elliott & al [Ell80]. Il s'est en particulier illustré dans l'interprétation des noyaux pair-pair  $N = Z$  situés au delà du  $^{56}\text{Ni}$  [Ell96, Gar99]. Pour les noyaux impair-impair, l'introduction de bosons  $T = 0$  devient nécessaire [Tho87] et conduit à l'approche IBM-4 [Ell81] qui fait précisément l'objet du chapitre 3 de ce mémoire.

Une dernière extension importante du formalisme IBM concerne les noyaux de masse impaire où il devient nécessaire de prendre en compte simultanément des degrés de liberté bosoniques et fermioniques respectivement associés aux paires collectives et aux nucléons non appariés. Logiquement, les modèles correspondants sont donc plutôt désignés sous le terme générique IBFM (Interacting Boson Fermion Model) et leur description détaillée pourra être trouvée dans les références [Iac91, Fra94-chapitre 10]. Précisons simplement que si aucune distinction entre protons et neutrons n'est introduite (IBFM-1), la structure algébrique à



considérer pour les bosons de moment cinétique  $J = 0, 2$  est toujours  $U(6)$  alors que pour les fermions il faut invoquer le groupe unitaire  $U(\Omega)$ ,  $\Omega = \sum_j (2j+1)$  étant la dégénérescence des différentes orbites  $j$  de l'espace de valence dans lequel évoluent les nucléons non appariés. En outre, tous les opérateurs de fermions sont supposés commuter avec ceux de bosons et c'est donc finalement le produit  $U_B(6) \otimes U_F(\Omega)$  qui est adapté. L'erreur résultant d'une telle hypothèse est en fait approximativement corrigée par la suite en introduisant une interaction d'échange boson-fermion. En définitive, la description IBFM-1 d'un noyau comportant  $2\mathcal{N}_B$  nucléons appariés et  $\mathcal{N}_F$  nucléons célibataires repose donc sur des états de la forme :

$$\left| \begin{array}{ccc} U_B(6) & \otimes & U_F(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{N}_B] & & [\mathcal{N}_F] \end{array} \right\rangle \supset \dots \supset \left| \begin{array}{ccc} SU_{BF}(2) \\ \downarrow \\ JM \end{array} \right\rangle, \quad (1.103)$$

les représentations  $[\mathcal{N}_B]$  (resp.  $[\mathcal{N}_F]$ ) assurant le caractère symétrique (resp. antisymétrique) du vecteur lors d'une permutation des bosons (resp. fermions). De nombreuses symétries dynamiques peuvent alors émerger de cette classification [Iac91, Fra94-chapitre 10]. Si une seule orbite  $j = 3/2$  est active dans l'espace de valence des nucléons non appariés, on a par exemple la chaîne de réduction suivante dont un exemple de réalisation est montré sur la figure (1.5) à propos du noyau  $^{191}_{77}\text{Ir}_{114}$  [Iac91-chapitre 4.7].

$$U_B(6) \otimes U_F(4) \supset SO_B(6) \otimes SU_F(4) \supset Spin_{BF}(6) \supset Spin_{BF}(5) \supset Spin_{BF}(3) \approx SU_{BF}(2) \quad (1.104)$$

NB : L'usage des groupes de recouvrement  $Spin(N)$  est ici indispensable en raison de l'intervention de représentations demi-entières engendrées par les couplages boson-fermion .

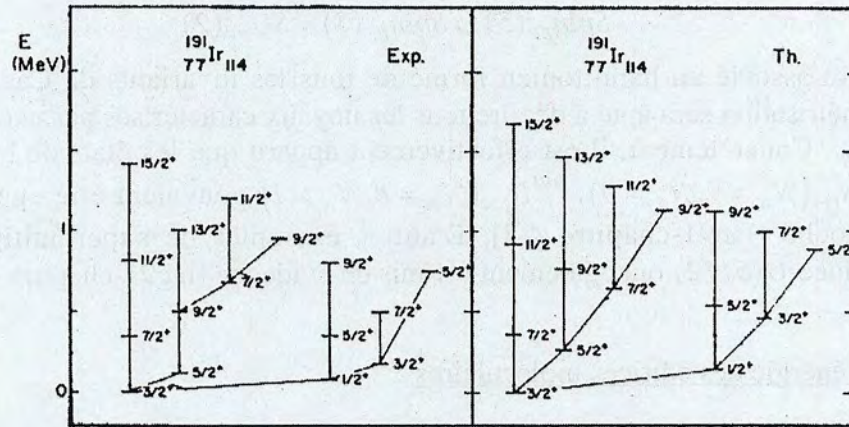


Figure 1.5 : Comparaison entre les prédictions de la limite  $Spin_{BF}(6)$  de IBFM-1 et la spectroscopie expérimentale du noyau  $^{191}_{77}\text{Ir}_{114}$ .



Enfin, de manière similaire à la physique hadronique où des multiplets d'isospin peuvent être réunis dans une représentation d'un groupe plus large, une extension de la structure algébrique  $U_B(6) \otimes U_F(\Omega)$  a été proposée par Iachello [Iac80] afin de rassembler les noyaux caractérisés par la même somme  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_B + \mathcal{N}_F$ . Cette extension est obtenue en ajoutant aux générateurs  $g_{n_{B_1} n_{B_2}}^B = b_{n_{B_1}}^+ b_{n_{B_2}}$  ( $n_{B_1}, n_{B_2} = 1 \rightarrow 6$ ),  $g_{n_{F_1} n_{F_2}}^F = a_{n_{F_1}}^+ a_{n_{F_2}}$  ( $n_{F_1}, n_{F_2} = 1 \rightarrow \Omega$ ) des groupes  $U_B(6)$ ,  $U_F(\Omega)$ , les opérateurs  $g_{n_{B_1} n_{F_2}}^{BF} = b_{n_{B_1}}^+ a_{n_{F_2}}$ ,  $g_{n_{F_1} n_{B_2}}^{FB} = a_{n_{F_1}}^+ b_{n_{B_2}}$  qui transforment un fermion en boson ou vice-versa. On peut alors facilement établir des relations du type :

$$[g_{\rho_1}, g_{\rho_2}] = \sum_{\rho_3} X_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3} g_{\rho_3}, \quad [g_{\rho_1}, g'_{\rho_2}] = \sum_{\rho_3} Y_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3} g'_{\rho_3} \quad \text{et} \quad \{g'_{\rho_1}, g'_{\rho_2}\} = \sum_{\rho_3} Z_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3} g'_{\rho_3} \quad (1.105)$$

où  $g_\rho$  désigne l'un des opérateurs  $g_{n_{B_1} n_{B_2}}^B, g_{n_{F_1} n_{F_2}}^F, g'_\rho$  un élément de la famille  $g_{n_{B_1} n_{F_2}}^{BF}, g_{n_{F_1} n_{B_2}}^{FB}$  et  $X_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3}, Y_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3}, Z_{\rho_1 \rho_2}^{\rho_3}$  des nombres. Les égalités précédentes généralisent clairement le concept d'algèbre de Lie en introduisant une classe d'opérateurs stables par anticommutation au lieu de l'être par commutation : on parle d'algèbre de Lie graduée ou de superalgèbre [Iac91-chapitre 4.2]. Dans le cas présent, les valeurs des constantes  $X, Y, Z$  sont en fait caractéristiques du supergroupe unitaire  $U(6/\Omega)$  vis-à-vis duquel tous les vecteurs (1.103) se transforment de la même manière dès qu'ils sont associés à un même nombre total  $\mathcal{N}$  de fermions et de bosons. Ces vecteurs définissent ainsi une RI de  $U(6/\Omega)$  notée  $[\mathcal{N}]$  et que l'on nomme supermultiplet. Malgré son élégance formelle,  $U(6/\Omega)$  ne peut toutefois représenter une invariance exacte car si tel était le cas tous les états de tous les noyaux d'un supermultiplet auraient des énergies similaires. De nouveau, le concept de symétrie dynamique offre alors une perspective intéressante en permettant par exemple de briser le supergroupe  $U(6/\Omega)$  par réduction dans son plus grand groupe de Lie  $U_B(6) \otimes U_F(\Omega)$ . Pour  $\Omega = 4$  et compte tenu de (1.104), on peut ainsi envisager la chaîne de supersymétrie dynamique suivante :

$$U(6/4) \supset U_B(6) \otimes U_F(4) \supset SO_B(6) \otimes SU_F(4) \supset Spin_{BF}(6) \supset \dots$$

$$Spin_{BF}(5) \supset Spin_{BF}(3) \approx SU_{BF}(2) \quad (1.106)$$

à laquelle sera associé un hamiltonien formé de tous les invariants de Casimir et dont une unique paramétrisation sera apte à décrire tous les noyaux caractérisés par une même valeur de  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_B + \mathcal{N}_F$ . Concrètement, il est effectivement apparu que les états de basse énergie des noyaux  $^{190}_{76}Os_{114}(\mathcal{N}_B = 9, \mathcal{N}_F = 0)$ ,  $^{191}_{77}Ir_{114}(\mathcal{N}_B = 8, \mathcal{N}_F = 1)$  pouvaient être appréhendés par ce genre d'approche [Iac91-chapitre 4.7]. D'autres exemples de supermultiplets associés à l'algèbre graduée  $U(6/12)$  ont également été mis en évidence [Iac91-chapitre 4.8].

### ③ Niveaux d'énergie des édifices moléculaires

Le succès du modèle de bosons en interaction dans la description des phénomènes nucléaires collectifs conduit naturellement à s'interroger sur son éventuelle pertinence dans d'autres systèmes à N corps. Au niveau de la structure des molécules, une approche similaire s'est en fait également révélée fructueuse. La version la plus simple, connue sous le nom de



modèle du vibron et développée par Iachello et Levine [Iac81, Iac82], vise à décrire les mouvements de vibration et de rotation des molécules diatomiques en terme de bosons  $b_{j,m}^+$  ( $m = -j \rightarrow j$ ) caractérisés par un moment cinétique et une parité  $j^p = 0^+$  (boson  $s^+$ ) ou  $j^p = 1^-$  (boson  $\pi_m^+$ ). Sa structure algébrique est donc celle du groupe unitaire  $U(4)$  et seules 2 limites apparaissent en mesure de préserver l'invariance par rotation [Fra94-chapitre 5] :

$$U(4) \supset \left\{ \begin{array}{c} U(3) \\ SO(4) \end{array} \right\} \supset SO(3), \quad (1.107)$$

où les générateurs de chacun des groupes mis en jeu sont rassemblés dans le tableau suivant.

$U(4)$	$\{b_{j_1, m_1}^+ b_{j_2, m_2}\}_{j_1, m_1, j_2, m_2}$ ou $\left\{ \left[ b_{j_1}^+ \otimes \tilde{b}_{j_2} \right]_M^J \right\}_{j_1, j_2, J, M}$
$U(3)$	$\{\pi_{m_1}^+ \pi_{m_2}\}_{m_1, m_2}$ ou $\left\{ \left[ \pi^+ \otimes \tilde{\pi} \right]_M^J \right\}_{\substack{J=0,1,2 \\ M=-J \rightarrow J}}$
$SO(4)$	$\left\{ \left[ \pi^+ \otimes \tilde{\pi} \right]_\mu^l, \left[ \pi^+ \otimes \tilde{s} + s^+ \otimes \tilde{\pi} \right]_\mu^l \right\}_{\mu=-l \rightarrow l}$
$SO(3)$	$\left\{ J_\mu = \sqrt{2} \left[ \pi^+ \otimes \tilde{\pi} \right]_\mu^l \right\}_{\mu=-l \rightarrow l}$

(1.108)

De la même manière que pour IBM, l'hamiltonien général du modèle du vibron peut s'écrire comme une combinaison linéaire de tous les opérateurs de Casimir associés aux groupes impliqués dans le schéma de réduction (1.107), soit :

$$H = \kappa_o(\hat{\mathcal{N}}) + \kappa_1 C_1[U(3)] + \kappa_2 C_2[U(3)] + \kappa_3 C_2[SO(4)] + \kappa_4 C_2[SO(3)] \quad (1.109)$$

( $\hat{\mathcal{N}}$  = opérateur nombre de bosons)

La limite  $U(3)$  est alors obtenue en posant  $\kappa_3 = 0$  et les états qui lui correspondent nécessitent en premier lieu de connaître la décomposition en  $U(3)$  de la représentation totalement symétrique  $[\mathcal{N}]$  du groupe  $U(4)$ . Cette réduction du type  $U(N) \supset U(N-1)$  a été donnée auparavant [cf. équations (1.82)] et son application dans le cas présent conduit aisément à ne considérer que les RI de  $U(3)$  associées à un schéma de Young formé d'une seule ligne comportant un nombre de cases compris entre 0 et  $\mathcal{N}$ . Ce nombre de cases s'identifie par ailleurs au nombre de bosons  $\pi$  puisqu'il est identique à la valeur propre de l'invariant linéaire  $C_1[U(3)]$  donné ici par  $\sum_m \pi_m^+ \pi_m$  [cf. équations (1.70) et (1.40)].

Finalement, les RI de  $U(3)$  pertinentes dans le modèle du vibron s'écriront donc  $[n_\pi]$  et il ne reste plus qu'à les décomposer en  $SO(3)$  selon l'algorithme donné dans le tableau (1.82) pour obtenir les valeurs autorisées du nombre quantique de moment cinétique  $J$ . Le résultat est donné ci-dessous où sont rassemblés toutes les caractéristiques des états dans la limite  $U(3)$ :

$$\left| \begin{array}{ccc} U(4) & \supset & U(3) & \supset & SO(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{N}] & & [n_\pi] & & JM \end{array} \right\rangle \text{ avec } \begin{cases} n_\pi = 0, \dots, \mathcal{N} \\ J = n_\pi, n_\pi - 2, \dots, 0 \text{ ou } 1 \end{cases} \quad (1.110)$$



Les niveaux d'énergie associés s'en déduisent immédiatement grâce aux valeurs propres des opérateurs de Casimir données dans la discussion générale du paragraphe II-4 [équations (1.70), (1.73) et (1.76)] :

$$E[U(3)] = \kappa_o(\mathcal{N}) + \kappa_1 \langle C_1[U(3)] \rangle_{[n_\pi]} + \kappa_2 \langle C_2[U(3)] \rangle_{[n_\pi]} + \kappa_4 \langle C_4[U(3)] \rangle_{(J)} \\ \Rightarrow E[U(3)] = \kappa_o(\mathcal{N}) + \kappa_1 n_\pi + \kappa_2 n_\pi (n_\pi + 3) + 2\kappa_4 J(J+1) \quad (1.111)$$

Le spectre qui en résulte est montré sur la figure (1.6) pour un système de  $\mathcal{N} = 6$  bosons et ressemble à celui d'un oscillateur harmonique tridimensionnel isotrope typique des molécules non rigides [Her50].

Une analyse en tout point similaire peut être menée au sujet de la limite  $SO(4)$  et conduit à des états et des énergies données par :

$$\left| \begin{array}{ccc} U(4) & \supset & SO(4) & \supset & SO(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{N}] & & (\sigma) & & JM \end{array} \right\rangle \text{ où } \begin{cases} \sigma = \mathcal{N}, \mathcal{N}-2, \dots, 0 \text{ ou } 1 \\ J = 0, 1, \dots, \sigma \end{cases} \quad (1.112)$$

$$E[SO(4)] = \kappa_o(\mathcal{N}) + 2\kappa_3 \sigma(\sigma+2) + 2\kappa_4 J(J+1) \quad (1.113)$$

**NB :** En général, la réduction  $U(N) \supset SO(N)$  n'est pas analytique. Cependant pour la représentation symétrique  $[\mathcal{N}]$  du groupe unitaire, on peut montrer qu'un seul label  $\sigma$  caractérise les RI de  $SO(N)$  avec en plus  $\sigma = \mathcal{N}, \mathcal{N}-2, \dots, 0$  ou  $1$  [Fra94-chapitre 4]. C'est l'application de ce résultat ainsi que de la règle de branchement  $SO(4) \supset SO(3)$  donnée dans le tableau (1.82) qui est à l'origine du domaine de variation des nombres quantiques dans les états  $SO(4)$  (1.112)

Physiquement, la chaîne  $SO(4)$  dont un spectre typique est représenté ci-dessous, se caractérise par des bandes rotationnelles construites sur chaque niveau de vibration et correspond à des molécules rigides [Her50]. Un exemple concret est montré sur la figure (1.7) au sujet du dihydrogène [Iac93]

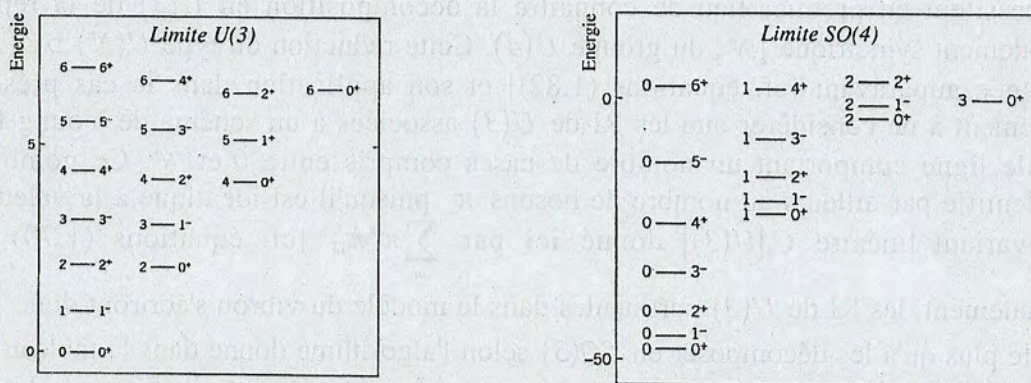


Figure 1.6 : Niveaux d'énergie dans chacune des limites du vibron pour  $\mathcal{N} = 6$  bosons. Les états  $U(3)$ ,  $SO(4)$  sont respectivement désignés par  $n_\pi - J^P$  et  $v - J^P$  où  $v = (\mathcal{N} - \sigma)/2$ . Les énergies sont enfin exprimées en unités arbitraires.



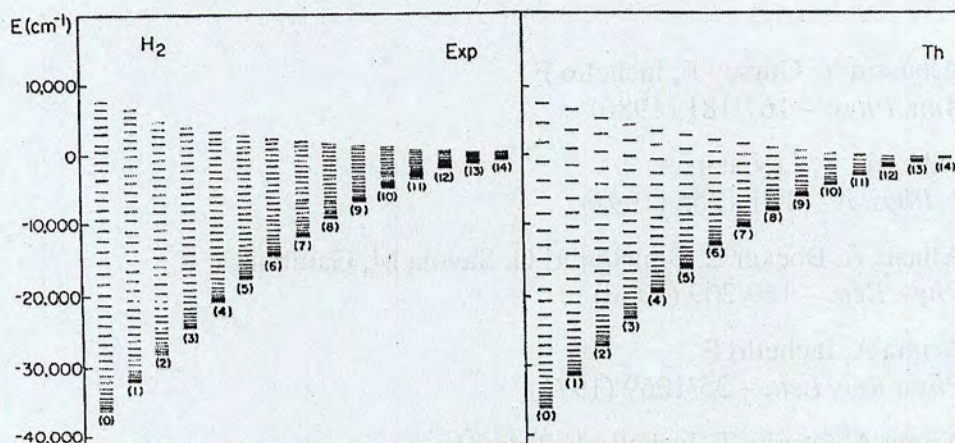


Figure 1.7 : Comparaison entre le spectre expérimental de la molécule  $H_2$  dans son état électronique fondamental et celui obtenu dans le modèle du vibron avec symétrie dynamique  $SO(4)$ .

#### En résumé :

Le concept de symétrie dynamique repose sur la possibilité d'identifier dans un système plusieurs groupes continus pouvant s'inclure les uns dans les autres :  $G^{(1)} \supset G^{(2)} \supset \dots$ . En écrivant l'hamiltonien comme une fonction des opérateurs de Casimir de toutes algèbres intervenant dans la chaîne de réduction, une diagonalisation analytique est alors possible et conduit à caractériser chaque état propre par l'ensemble des représentations irréductibles des groupes mis en jeu. Dans ce contexte, l'effet lié à l'introduction des invariants d'un sous groupe s'interprète physiquement comme une levée de dégénérescence vis à vis des RI de ce sous-groupe. Bien que formel, ce type d'invariance est omniprésent dans les systèmes physiques et en particulier dans ceux à N-corps où son utilisation peut permettre de fournir une vision globale des phénomènes collectifs qui se développent en leur sein.

Signalons enfin qu'en dehors des exemples que nous venons de présenter, de nombreuses autres manifestations des symétries dynamiques peuvent être trouvées : on peut citer l'atome d'hydrogène (symétrie  $SO(4) \supset SO(3)$  [Wyb74-chapitre 21]), les problèmes de diffusion [Alh86], la structure des hadrons [Bij94], le modèle des skyrmions associé à limite basse énergie de QCD [Oka87].



## Références

- [Alh86] Alhassid Y, Gürsey F, Iachello F  
*Ann. Phys.* – 167/181 (1986)
- [Alh92] Alhassid Y, Leviatan A  
*J. Phys. A* – 25/L1265 (1992)
- [All88] Allaart K, Boeker E, Bonsignori G, Savoia M, Gambhir Y K  
*Phys. Rep.* – 169/209 (1988)
- [Ari75] Arima A, Iachello F  
*Phys. Rev. Lett.* – 35/1069 (1975)
- [Ari77] Arima A, Otsuka T, Iachello F, Talmi I  
*Phys. Lett. B* – 66/205 (1977)
- [Bij94] Bijker R, Iachello F, Leviatan A  
*Ann. Phys.* – 236/69 (1994)
- [Boh75] Bohr A, Mottelson B R  
*Nuclear Structure (Volume2)* – Benjamin (1975)
- [Boh80] Bohr A, Mottelson B R  
*Physica Scripta* – 22/468 (1980)
- [Bun79] Bunker P R  
*Molecular Symmetry and Spectroscopy* – Academic Press (1979)
- [Cas81] Casten R F  
in *Interacting Bose-Fermi Systems in Nuclei* – Plenum (1981)
- [Cas93] Casten R F, Lipas P O, Warner D D, Otsuka T, Heyde K, Draayer J P  
*Algebraic Approaches to Nuclear Structure* - Harwood Academic Publishers (1993)
- [Cej98] Cejnar P, Jolie J  
*Phys. Lett. B* – 420/241 (1998)
- [Cha68] Chacon E  
*Doctoral Dissertation* – Université de Mexico (1968)
- [Die80] Dieperink A E L, Scholten O, Iachello F  
*Phys. Rev. Lett.* – 44/1747 (1980)
- [Ell58] Elliott J P  
*Proc. Roy. Soc. (London) A* – 245/128 et 245/562 (1958)
- [Ell79] Elliott J P, Dawber P G  
*Symmetry in Physics (Volume 1)* – Oxford University Press (1979)
- [Ell80] Elliott J P, White A P  
*Phys. Lett. B* – 97/169 (1980)



- [Ell81] Elliott J P, Evans J A  
*Phys. Lett. B* – 101/216 (1981)
- [Ell87] Elliott J P, Evans J A  
*Phys. Lett. B* – 195/1
- [Ell96] Elliott J P, Evans J A, Lac V S, Long G L  
*Nucl. Phys. A* - 609/1 (1996)
- [Fra94] Frank A, Van Isacker P  
*Algebraic Methods in Molecular & Nuclear Structure Physics* – Wiley (1994)
- [Gar99] Garcia-Ramos J E, Van Isacker P  
*Ann. Phys. (NY)* – 274/45 (1999)
- [Gel62] Gell-Mann M  
*Phys. Rev.* – 152/1067 (1962)
- [Gel64] Gell-Mann M, Ne'eman Y  
*The Eightfold Way* – Benjamin (1964)
- [Gil74] Gilmore R  
*Lie groups, Lie algebras and Some of Their Applications* – Wiley (1974)
- [Gin80] Ginocchio J N, Kirson M W  
*Phys. Rev. Lett.* – 44/1744 (1980)
- [Ham62] Hamermesh M  
*Group Theory and its Application to Physical Problems* – Addison Wesley (1962)
- [Her50] Herzberg G  
*Molecular Spectra and Molecular Structure (Volume 1)* – Van Nostrand (1950)
- [Hey92] Heyde K, De Coster C, Jolie J, Wood J L  
*Phys. Rev. C* – 46/541 (1992)
- [Iac80] Iachello F  
*Phys. Rev. Lett.* – 44/772 (1980)
- [Iac81] Iachello F  
*Chem. Phys. Lett.* – 78/581 (1981)
- [Iac82] Iachello F, Levine R D  
*J. Chem. Phys.* – 77/3046 (1982)
- [Iac87a] Iachello F, Arima A  
*The Interacting Boson Model* – Cambridge University Press (1987)
- [Iac87b] Iachello F, Talmi I  
*Rev. Mod. Phys.* – 59/339 (1987)
- [Iac91] Iachello F, Van Isacker P  
*The Interacting Boson-Fermion Model* – Cambridge University Press (1991)



- [Iac93] Iachello F  
*Nucl. Phys. A* – 560/23 (1993)
- [Iac98] Iachello F, Zamfir N V, Casten R F  
*Phys. Rev. Lett.* – 81/1191 (1998)
- [Jui96] Juillet O  
*Computer code for algebraic reductions* – Ganil (1996)
- [Kus97] Kusnezov D  
*Phys. Rev. Lett.* – 79/537 (1997)
- [Lev96] Leviatan A  
*Phys. Rev. Lett.* – 77/818 (1996)
- [Lip90] Lipas P O, Von Brentano P, Gelberg A  
*Rep. Progr. Phys.* – 53/1355 (1990)
- [Mes95] Messiah A  
*Mécanique Quantique (Tome 2)* – Dunod (1995)
- [Mos68] Moshinsky M  
*Group Theory and the Many Body Problem* – Gordon & Breach (1968)
- [Oka87] Oka M, Bijker R, Bulgac A, Amado R D  
*Phys. Rev. C* – 36/1727 (1987)
- [Oku62] Okubo S  
*Prog. Theor. Phys.* – 27/949 (1962)
- [Ots78] Otsuka T, Arima A, Iachello F, Talmi I  
*Phys. Lett. B* – 76/139 (1978)
- [Shi98] Shirokov A M, Smirnova N A, Smirnov Yu F  
*Phys. Lett. B* – 434/237 (1998)
- [Ster94] Sternberg S  
*Group theory and physics* – Cambridge University Press (1994)
- [Tal93] Talmi I  
*Simple Models of Complex Nuclei* - Harwood Academic Publishers (1993)
- [Tho87] Thompson M J, Elliott J P, Evans J A  
*Phys. Lett. B* – 195/511 (1987)
- [Van81] Van Isacker P, Chen J Q  
*Phys. Rev C* – 24/684 (1981)
- [Van99] Van Isacker P  
*Dynamical symetries in the structure of nuclei* – Preprint Ganil P99-22 (1999)
- [War97] Warner D D, Van Isacker P  
*Phys. Lett B* – 395/145 (1997)



- [Wei95] Weinberg S  
*The Quantum Theory of Fields (Volume 1)* - Cambridge University Press (1994)
- [Wig59] Wigner E P  
*Group Theory* – Academic Press (1959)
- [Wyb74] Wybourne B G  
*Classical Groups for Physicists* – Wiley (1974)



## Chapitre 2

### **Symétries des modèles de fermions en interaction pour les noyaux $N=Z$**

Ainsi que nous venons de le voir dans le précédent chapitre, les méthodes de la théorie des groupes offrent une perspective attrayante pour élucider le comportement des systèmes à  $N$ -corps et en particulier celui du noyau atomique. Dans ce contexte, outre les formalismes IBM que nous avons discutés et qui s'intéressent à l'aspect collectif, l'utilisation des algèbres de Lie pour générer la spectroscopie est également répandue dans les descriptions fermioniques [cf. article de synthèse Cas93-chapitre 7] : la structure de base du champ moyen nucléaire, à savoir un oscillateur harmonique tridimensionnel isotrope, est par exemple invariante sous les transformations d'un groupe  $U(3)$  [Wyb74-chapitre 20]. De même, les interactions résiduelles d'appariement entre nucléons identiques et de type quadrupolaire sont respectivement rattachées à des algèbres  $SU(2)$  [Rac43] et  $SU(3)$  [Ell58]. L'étude présentée ici s'inscrit dans cette même logique de recherche d'une classification algébrique des hamiltoniens du modèle en couches mais plus spécifiquement pour les noyaux lourds  $N = Z$  où les orbites actives sont essentiellement  $pf_{5/2}g_{9/2}$ . En réalité, nous nous concentrerons sur une extension de la symétrie spin-isospin  $SU(4)$  de Wigner, connue pour constituer un bon schéma d'approximation dans les noyaux légers et dont les principales caractéristiques mathématiques et physiques seront tout d'abord rappelées. Le prolongement aux systèmes lourds, basé sur la notion de pseudo-spin, sera ensuite exposé et sa validité discutée au regard de la structure des états réalistes et des transitions Gamow-Teller.



## I – Invariance en spin-isospin de Wigner

### ① Présentation mathématique

Quelque temps après l'introduction de la symétrie d'isospin en physique nucléaire par Heisenberg [Hei32], Wigner et Hund ont indépendamment proposé une généralisation consistant à incorporer les degrés de liberté de spin [Wig37, Hun37]. Plus précisément, en notant  $s_\mu^{(\alpha)}$  et  $t_\mu^{(\alpha)}$  ( $\mu = -1, 0, 1$ ) les composantes standard des observables de spin et d'isospin de chaque nucléon  $\alpha$ , leur modélisation du noyau repose sur un hamiltonien commutant non seulement avec l'isospin total  $T_\mu = \sum_\alpha t_\mu^{(\alpha)}$  mais aussi avec le spin total  $S_\mu = \sum_\alpha s_\mu^{(\alpha)}$  et avec le double vecteur de type Gamow-Teller  $Y_{\mu,\nu} = \sum_\alpha s_\mu^{(\alpha)} t_\nu^{(\alpha)}$  :

$$[H, S_\mu] = [H, T_\mu] = [H, Y_{\mu,\nu}] = 0 \quad (2.1)$$

Sur le plan algébrique, les 15 composantes  $\{S_\mu, T_\mu, Y_{\mu,\nu}\}_{\mu,\nu=-1,0,1}$  forment par ailleurs les générateurs d'un groupe  $SU(4)$  noté plus précisément  $SU_{ST}(4)$  pour bien indiquer l'espace de réalisation. Dès lors, tout hamiltonien  $H$  vérifiant (2.1) admet des états propres qui, conformément aux arguments généraux du chapitre précédent, sont caractérisés chacun par une représentation irréductible  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$  de ce groupe  $SU_{ST}(4)$ . De plus, les 2 premiers commutateurs de (2.1), reliés à l'invariance sous les groupes  $SU_S(2)$  et  $SU_T(2)$  des rotations dans les espaces de spin et d'isospin, entraînent la pertinence des nombres quantiques  $SM_S$  et  $TM_T$  dans la caractérisation des vecteurs propres de  $H$ . Enfin, l'insensibilité aux rotations d'espace générées par le moment cinétique total  $J_\mu = L_\mu + S_\mu$ ,  $L_\mu$  étant le moment orbital, oblige nécessairement  $H$  à commuter avec  $J_\mu$  et donc avec  $L_\mu$  de sorte qu'il y a également conservation de  $LM_L$ . En résumé, les états propres de n'importe quel hamiltonien  $H$  avec symétrie spin-isospin  $SU_{ST}(4)$  s'écrivent donc :

$$|\mathcal{N}, [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3], \alpha, LM_L, SM_S, TM_T\rangle \quad (2.2)$$

où  $\mathcal{N}$  est le nombre de particules et où  $\alpha$  désigne les labels qui permettent de compléter la caractérisation orbitale des états. Le formalisme  $SU_{ST}(4)$  permet ainsi de rassembler dans une même représentation plusieurs multiplets d'isospin et c'est pourquoi, on donne souvent le nom de supermultiplet à la RI  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$  même si cette terminologie est ici sans rapport avec la supersymétrie et le modèle IBFM où elle est également employée (cf. chapitre 1)

Au niveau du modèle en couches, la structure  $SU_{ST}(4)$  apparaît en fait dans toute décomposition algébrique séparant les degrés de liberté orbitaux et de spin-isospin des différents nucléons, soit :



$$\begin{array}{ccccccc}
U(4\Omega) \supset & U_L(\Omega) & \otimes & U_{ST}(4) & \supset & U_L(\Omega) \otimes & SU_{ST}(4) \supset \dots \supset SO_L(3) \otimes SU_S(2) \otimes SU_T(2) \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
[I^N] & [\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_\Omega] & & [f_1, \dots, f_4] & & [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] & \propto \quad LM_L \quad SM_S \quad TM_T
\end{array} \quad (2.3)$$

où :

- $\Omega = \sum_l (2l+1)$  est la dégénérescence orbitale de l'espace de valence
- $U(4\Omega)$  est le groupe unitaire généré par les produits  $a_{n_1}^+ a_{n_2}$  ( $n_1, n_2 = 1 \rightarrow$  Nombre d'états individuels, c'est-à-dire  $4\Omega$ ) et dont les représentations antisymétriques  $[I^N]$  supportent chacune l'ensemble des états à nombre déterminé  $N$  de particules (cf. chapitre 1)
- $U_L(\Omega)$  et  $U_{ST}(4)$  sont les groupes engendrés respectivement par les opérateurs multipolaires suivants :

$$\left\{ \left[ a_{l_1, l/2, l/2}^+ \otimes \tilde{a}_{l_2, l/2, l/2} \right]_{M_L, M_S=0, M_T=0}^{L, S=0, T=0} \right\}_{l_1, l_2, L, M_L}$$

et

$$\left\{ \sum_l \sqrt{2l+1} \left[ a_{l, l/2, l/2}^+ \otimes \tilde{a}_{l, l/2, l/2} \right]_{M_L=0, M_S, M_T}^{L=0, S, T} \right\}_{S, M_S, T, M_T} .$$

Conformément aux résultats généraux du chapitre précédent, leurs RI sont de plus définies par des schémas de Young comportant au maximum  $\Omega$  lignes pour  $U_L(\Omega)$  et 4 lignes pour  $U_{ST}(4)$  ce qui justifie donc la notation introduite dans (2.3). Par ailleurs, pour respecter l'antisymétrie globale, ces représentations sont nécessairement liées : par exemple, si le vecteur d'état est symétrique dans une permutation orbitale des particules [représentation à 1 ligne de  $U_L(\Omega)$ ], il doit forcément être antisymétrique en spin-isospin [représentation à 1 colonne de  $U_{ST}(4)$ ]. De façon plus générale, on peut en fait prouver [Ham62-chapitre 7] que les schémas  $[f_1, \dots, f_4]$  et  $[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_\Omega]$  doivent être conjugués, c'est à dire que l'un s'obtient à partir de l'autre en échangeant lignes et colonnes. (Pour une statistique de bosons, il faudrait au contraire que les RI soient identiques afin de préserver le caractère totalement symétrique). Par conséquent, on a donc :

$$f_l \leq \Omega \quad (2.4)$$

En outre, comme les invariants linéaires de chacun des groupes  $U(4\Omega)$ ,  $U_L(\Omega)$  et  $U_{ST}(4)$  sont tous égaux à l'opérateur nombre de particules, les schémas de Young associés aux représentations de ces groupes sont caractérisés par le même nombre de cases et donc :

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = N \quad (2.5)$$

Dès lors, le supermultiplet  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$  se déduit facilement de la réduction  $U(N) \supset SU(N)$  donnée au chapitre précédent :

$$\lambda_n = f_n - f_4, \quad (n = 1 \rightarrow 3) \quad (2.6)$$

Tous les labels  $f_n, \bar{f}_n$  peuvent ainsi finalement s'obtenir à partir des nombres quantiques  $SU_{ST}(4)$  qui acquièrent par ce biais un sens physique en tant qu'indicateur de la manière dont l'antisymétrie totale est distribuée sur les espaces orbital et de spin-isospin.



A titre d'exemple de la classification  $SU_{ST}(4)$ , nous avons considéré ci-dessous le cas d'une couche  $sd$  où toutes les limites orbitales permettant d'assurer la réduction de  $U_L(\Omega)$  dans  $SO_L(3)$  sont connues du modèle IBM-1 :

$$U(24) \supset \left[ U_L(6) \supset \left\{ \begin{array}{l} U_L(5) \supset SO_L(5) \\ SU_L(3) \\ SO_L(6) \supset SO_L(5) \end{array} \right\} \supset SO_L(3) \right] \otimes \dots$$

$$[U_{ST}(4) \supset SU_{ST}(4) \supset SU_S(2) \otimes SU_T(2)] \quad (2.7)$$

La caractérisation qui en résulte alors pour 1 et 2 nucléons est alors donnée dans le tableau (2.1) ci-dessous :

Nombre de nucléons	RI de $U_L(6)$	Moment orbital $L$	RI de $SU_{ST}(4)$	Spin / isospin $(S, T)$
1	$[1]$	$0(s), 2(d)$	$[1]$	$(1/2, 1/2)$
2	$[2]$	$0(s^2, d^2), 2(sd, d^2), 4(d^2)$	$[1, 1]$	$(0, 1), (1, 0)$
	$[1, 1]$	$1(d^2), 2(sd), 3(d^2)$	$[2]$	$(0, 0), (1, 1)$

Tableau (2.1) : Classification  $SU_{ST}(4)$  des états à 1 et 2 particules dans la couche  $sd$ .

Energétiquement, le caractère attractif à courte portée de l'interaction nucléaire résiduelle entraîne par ailleurs que les différents supermultiplets se rangent selon le degré de symétrie qu'ils confèrent à la partie orbitale du vecteur d'état. En adoptant une idéalisation de cette interaction, c'est-à-dire une force  $-V_o \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  ( $V_o > 0$ ), on prouve en effet facilement que pour 2 particules dans une même couche de moment orbital  $l$  [Tal93-chapitre 11] :

$$\langle l^2[2], LM_L, SM_S, TM_T | -V_o \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) | l^2[2], LM_L, SM_S, TM_T \rangle = 0 \quad (2.8)$$

Intuitivement, un tel résultat se comprend aisément dans la mesure où 2 nucléons placés dans une configuration spatiale antisymétrique ont une probabilité nulle de se trouver au même point. Au contraire, un couplage orbital symétrique autorise le développement des corrélations attractives et conduit ainsi à un élément de matrice négatif. En définitive, la représentation  $[1, 1]$  de  $SU_{ST}(4)$  est donc énergétiquement favorisée pour un système de 2 nucléons. Dans le cas d'un plus grand nombre de particules, une argumentation similaire peut également être menée via l'introduction d'un opérateur de Majorana  $M$  qui mesure le degré de symétrie orbitale du vecteur d'état auquel il est appliqué [Tal93-chapitre 29] :

$$M = \sum_{\alpha < \beta} P_{\alpha, \beta}^{(o)} \text{ où } P_{\alpha, \beta}^{(o)} \text{ échange les degrés de liberté orbitaux des particules } \alpha \text{ et } \beta \quad (2.9)$$



$\Rightarrow M|\Psi\rangle = \pm \frac{\mathcal{N}(\mathcal{N}-1)}{2}|\Psi\rangle$  selon que  $|\Psi\rangle$  est totalement symétrique ou antisymétrique dans l'échange spatial des particules

Vis à vis du formalisme  $SU_{ST}(4)$ , cet opérateur s'avère en fait particulièrement intéressant dans la mesure où l'antisymétrie globale permet de l'exprimer à l'aide de l'invariant quadratique  $C_2[SU_{ST}(4)]$  [Tal93–chapitre 29] :

$$M = \frac{\mathcal{N}(16-\mathcal{N})}{8} - \frac{1}{8}C_2[SU_{ST}(4)] \quad (2.10)$$

Par conséquent, tous les états du modèle de Wigner diagonalisent  $M$  et la valeur propre associée est ainsi une estimation quantitative du degré de symétrie spatiale contenu dans chaque RI de  $SU_{ST}(4)$ . Il en résulte donc que le supermultiplet de plus basse énergie s'obtient en maximisant cette valeur propre de  $M$ , c'est-à-dire en minimisant l'opérateur de Casimir  $C_2[SU_{ST}(4)]$  à l'intérieur des représentations  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$  qui contiennent des isospins  $T$  compatibles avec la composition proton-neutron du système, soit  $T \geq |N-Z|/2$ . Le résultat d'une telle analyse est précisément donné dans le tableau (2.2) suivant [Tal93–chapitre 29].

Type de noyau $(N, Z)$		Supermultiplet énergétiquement favorisé
Pair-Pair		$[T_m, T_m]$
Impair-Impair	$N = Z$	$[1, 1]$
	$N \neq Z$	$[T_m + 1, T_m, 1]$
Pair-Impair		$[T_m + 1/2, T_m - 1/2]$
Impair-Pair		$[T_m + 1/2, T_m + 1/2, 1]$

**Tableau (2.2) :** Représentations irréductibles fondamentales du groupe  $SU_{ST}(4)$ .  $T_m$  désigne l'isospin minimum du système, soit  $T_m = |N-Z|/2$ .

## ② Conséquences physiques et validité

### a- Position relative des niveaux dans les noyaux $N=Z$ impair-impair

Comme nous venons de le voir, l'état fondamental  $SU_{ST}(4)$  des systèmes impair-impair à nombres égaux de protons et de neutrons est décrit par le schéma de Young antisymétrique  $[1, 1]$  dont la réduction en spin-isospin contient par ailleurs les couples  $(S, T) = (0, 1)$ ,  $(1, 0)$ .



Pour de tels noyaux, l'approche de Wigner prédit donc une dégénérescence des niveaux isoscalaire et isovectoriel de plus basse énergie. Dans la réalité, la présence de 2 états d'isospin  $T = 0$  et  $T = 1$  proches en énergie est bien observée mais avec un écart en général non négligeable, comme l'atteste la figure (2.1) ci-après. Signalons en outre que la position relative de ces niveaux change en fait à partir du passage dans la couche  $fp$  mises à part les 2 exceptions que constituent les noyaux de  $^{34}\text{Cl}$  et de  $^{58}\text{Cu}$ .

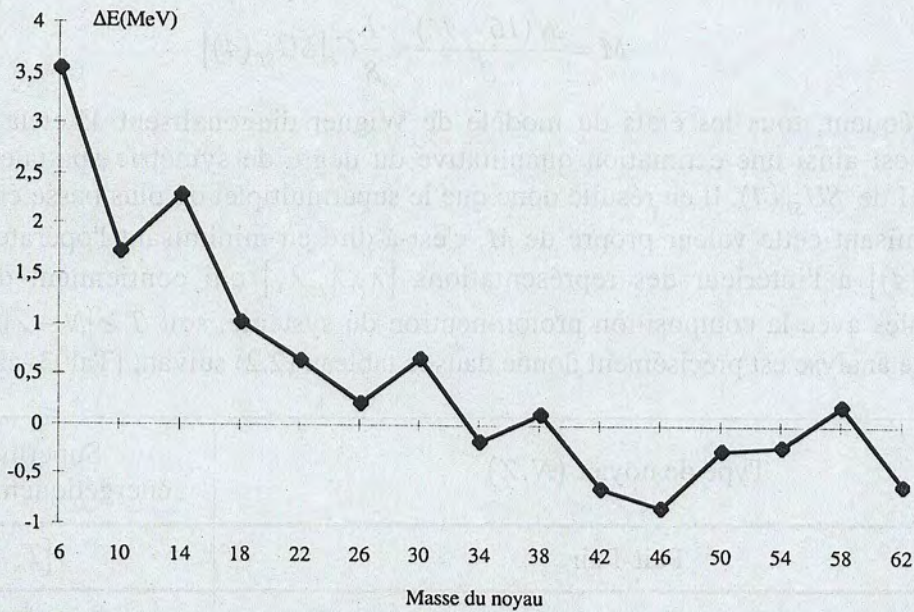


Figure (2.1) : Evolution avec la masse de l'écart  $\Delta E = E(T = 1) - E(T = 0)$  entre les niveaux isoscalaire et isovectorielle de plus basse énergie dans les noyaux  $N = Z$  impair-impair.

Une brisure de la symétrie spin-isospin apparaît donc ainsi clairement. Cependant, il est important de réaliser que la caractérisation  $SU_{ST}(4)$  des états nucléaires peut tout de même conserver sa pertinence dans la mesure où la seule analyse des niveaux d'énergie ne permet pas d'exclure que cette brisure ait un caractère dynamique.

#### b- Singularité de masse le long de la ligne $N=Z$

Expérimentalement, il a depuis longtemps été constaté que dans chaque chaîne isobarique, le noyau  $N = Z$  est plus lié que les autres [cf. article de synthèse Zel96]. Ce comportement anormal se traduit en particulier dans les formules de masse semi-empiriques par l'addition d'un terme de Wigner purement phénoménologique, et paramétré selon [Zel96] :

$$B_{Wigner}(N, Z) = W(A) |N - Z| \quad (2.11)$$

En outre, les singularités de la ligne  $N = Z$  se manifestent également dans les doubles différences de masse  $\delta V_{np}$ , initialement introduites pour estimer l'intensité moyenne de



l'interaction neutron-proton et données dans le cas d'un noyau pair-pair par l'expression suivante [Zha89] :

$$\delta V_{np}(N, Z) = \frac{1}{4} \{ [B(N, Z) - B(N, Z - 2)] - [B(N - 2, Z) - B(N - 2, Z - 2)] \} \quad (2.12)$$

( $B$  désigne l'énergie de liaison)

L'évolution de cet indicateur dans la couche  $sd$  est précisément représentée sur la figure (2.2) suivante où la spécificité  $N = Z$  apparaît alors clairement en se manifestant par une brusque augmentation de la valeur absolue de  $\delta V_{np}$ . Signalons que ce résultat est en fait observé de façon générale [Van95] avec seulement une légère différence pour les systèmes de masse impaire où la discontinuité de  $\delta V_{np}$  est logiquement déplacée en  $N = Z \pm 1$  selon que  $N$  est pair ou impair.

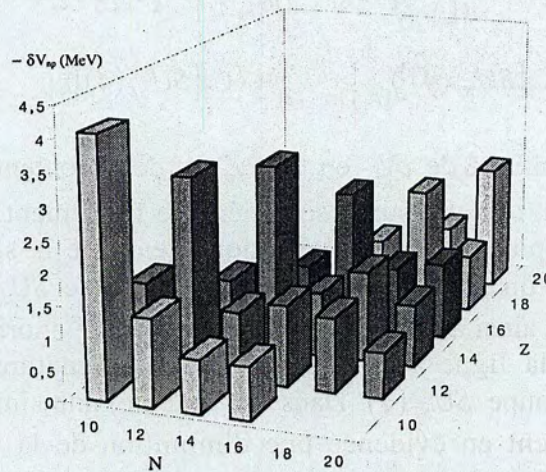


Figure (2.2) : Histogramme tridimensionnel représentant la double différence de masse  $\delta V_{np}$  en fonction de  $N$  et  $Z$  pour les noyaux pair-pair de la couche  $sd$  où les masses mesurées permettent le calcul de  $\delta V_{np}$ .

Une connexion entre les 2 visions des anomalies de masse a par ailleurs été proposée par Satula & al [Sat97] en suggérant d'estimer le coefficient  $W(A)$  du terme de Wigner par l'amplitude de la singularité de  $\delta V_{np}$  :

$$W(A) = \delta V_{np} \left( \frac{A}{2}, \frac{A}{2} \right) - \frac{1}{2} \left[ \delta V_{np} \left( \frac{A}{2}, \frac{A}{2} - 2 \right) + \delta V_{np} \left( \frac{A}{2} + 2, \frac{A}{2} \right) \right] \quad (2.13)$$

(Cas où le noyau  $N = Z$  est pair-pair ; les autres situations sont traitées dans [Sat97])

C'est ainsi que l'on peut facilement observer une décroissance de  $W(A)$  avec la masse conformément avec la loi approximative [Sat97] :

$$W(A) \approx a_w / A \quad (2.14)$$



Dans le cadre du modèle  $SU_{ST}(4)$ , il est en réalité aisé d'estimer  $\delta V_{np}$  si l'on considère comme précédemment que les énergies sont données par la valeur propre de l'opérateur de Casimir  $C_2[SU_{ST}(4)]$ . Compte tenu des règles du tableau (2.2) déterminant le supermultiplet fondamental et de l'expression (1.75) du chapitre 1, il vient en effet toujours pour un noyau pair-pair :

➤ Si  $N = Z$  :

$$\delta V_{np}(N, Z) = \frac{1}{4} \left[ \langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle_{[0,0]} - \langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle_{[1,1]} \dots \right. \\ \left. - \langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle_{[1,1]} + \langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle_{[0,0]} \right] = -10 \quad (2.15)$$

➤ Si  $N \neq Z$  :

$$\delta V_{np}(N, Z) = \frac{1}{4} \left[ \langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle_{[T_m, T_m]} - \langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle_{[T_m-1, T_m-1]} \dots \right. \\ \left. - \langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle_{[T_m+1, T_m+1]} + \langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle_{[T_m, T_m]} \right] = -2 \quad (2.16)$$

En conséquence, la spécificité de  $\delta V_{np}$  en  $N = Z$  est donc contenue dans la symétrie  $SU_{ST}(4)$  de Wigner. De nouveau, un tel résultat se généralise facilement aux autres types de noyaux [Van95] et on peut de plus montrer schématiquement que la singularité se détruit avec la brisure explicite (c'est-à-dire de manière non-dynamique) de  $SU_{ST}(4)$  [Van95]. En définitive, tous ces points amènent ainsi à considérer que l'importance anormale de la double différence de masse le long de la ligne  $N = Z$  constitue une signature du degré d'invariance de l'hamiltonien sous le groupe  $SU_{ST}(4)$ . Dans ce contexte, une simple observation de la figure (2.2) met alors nettement en évidence une diminution de la validité de l'approximation  $SU_{ST}(4)$  au fur à mesure que la masse augmente.

Pour en avoir une plus nette confirmation, nous avons effectué une comparaison de l'évolution de l'estimateur  $\delta V_{np}$  dans différentes approches basées sur une évaluation plus réaliste des masses nucléaires grâce à la formule de Weizsäcker. Plus précisément, les 3 cas suivants ont été envisagés :

- $W_0$  : Démarche habituelle consistant à prendre en compte des termes de volume ( $a_v A$ ), d'asymétrie ( $a_a (N - Z)^2 / A$ ), de surface ( $a_s A^{2/3}$ ), de répulsion coulombienne ( $a_c Z^2 / A^{1/3}$ ) et d'appariement entre nucléons identiques ( $a_p \delta(A) / A^{3/4}$  avec  $\delta(A) = 1, 0, -1$  pour les noyaux pair-pair, de masse impaire et impair-impair).
- $W_1$  : Ajout d'une énergie de Wigner  $a_w |N - Z| / A$  [cf. (2.11) et (2.14)]
- $W_2$  : Introduction du formalisme  $SU_{ST}(4)$  par l'intermédiaire de la valeur propre  $\langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle$  de l'invariant quadratique dans le supermultiplet fondamental.



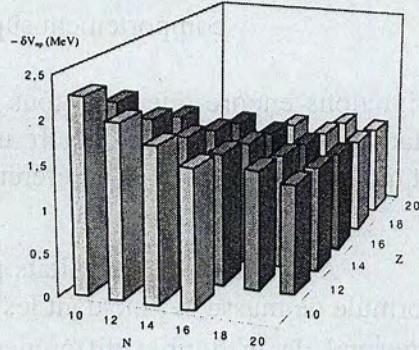
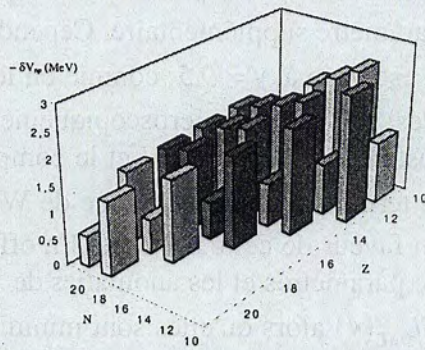
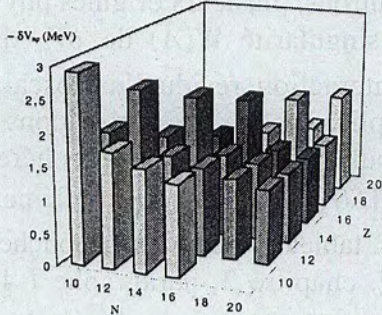
En outre, pour inclure une vraisemblable dépendance avec la masse  $A$ , une pondération de cette valeur propre par une puissance  $A^\gamma$  est également considérée. Enfin, comme il est possible de mettre en évidence (cf. paragraphe III-1 du chapitre 3) que les corrélations de la symétrie  $SU_{ST}(4)$  ont une composante d'appariement, le terme  $a_p \delta(A)/A^{3/4}$  également lié au comportement superfluide du noyau a été supprimé.

Signalons encore que dans tous les cas, les paramètres sont déterminés par une procédure standard d'optimisation linéaire utilisant l'ensemble des masses mesurées expérimentalement et qui sont données dans la référence [Aud93].

A l'examen des résultats présentés sur la page suivante, il apparaît bien que seule la formule de masse  $W_2$  incluant les effets  $SU_{ST}(4)$  est en mesure de reproduire le comportement anormal de la double différence de masse  $\delta V_{np}$  en  $N=Z$ . De plus, le coefficient  $\gamma$  de dépendance en masse est trouvé positif et traduit donc quantitativement le résultat annoncé auparavant, à savoir une brisure de la symétrie  $SU_{ST}(4)$  d'autant plus importante que le noyau est lourd. Il faut également noter que dans la paramétrisation  $W_2$ , l'écart moyen entre l'énergie de liaison calculée et celle mesurée diminue d'environ 600 KeV par rapport à la formule standard  $W_0$ . On pourrait alors penser que cette amélioration provient de l'utilisation d'un paramètre supplémentaire. Cependant, si la loi de variation de l'énergie  $SU_{ST}(4)$  avec la masse  $A$  est fixée à  $\gamma = 0.5$ , comme on le fait dans le terme habituel  $a_p \delta(A)/A^{3/4}$  où l'exposant  $3/4$  n'est pas justifié microscopiquement, les résultats demeurent similaires : la déviation moyenne reste égale à 2.88 MeV et le comportement de  $\delta V_{np}$  est inchangé. Enfin, la comparaison entre le terme phénoménologique de Wigner ( $W_1$ ) et la contribution  $SU_{ST}(4)$  ( $W_2$ ) est clairement en faveur de cette dernière. En effet, l'erreur moyenne  $y$  est plus faible avec le même nombre de paramètres et les anomalies de  $\delta V_{np}$  sont bien maximales en valeur absolue avec la symétrie  $SU_{ST}(4)$  alors qu'elles sont minimales avec le terme de Wigner. En définitive, il semble donc que l'énergie de Wigner ne soit pas correctement représentée par les relations (2.11), (2.14) et qu'elle puisse être incluse avec l'appariement entre nucléons identiques dans un terme reflétant la symétrie spin-isospin  $SU_{ST}(4)$ .

Depuis la mise en évidence des anomalies de masse à nombres égaux de protons et de neutrons, plusieurs origines physiques avaient déjà été proposées. C'est ainsi que par calcul de la singularité  $W(A)$  de  $\delta V_{np}$  dans le contexte du modèle en couches, le rôle essentiel de l'interaction résiduelle isoscalaire a pu être isolé [Bre90, Sat97]. Plus récemment, une explication via des corrélations en quartets a aussi été avancée [Has99]. Tous ces précédents résultats sont en réalité cohérents avec l'interprétation ici proposée : en effet, l'opérateur  $C_2[SU_{ST}(4)]$  possède des éléments de matrice non nuls dans l'ensemble des voies isoscalaires [cf. tableau (2.2) pour la couche  $sd$ ] et nous montrerons ultérieurement dans un cas particulier (cf. chapitre 3, paragraphe I-4) que l'état fondamental d'un noyau à la limite  $SU_{ST}(4)$  se caractérise par un condensat de particules  $\alpha$ .



$W_0$ : Formule de Weizsäcker standard		
$B(N,Z) = a_v A + a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(A)}{A^{3/4}}$		
$a_v = 15.47 \text{ MeV}$ $a_a = -22.68 \text{ MeV}$ $a_s = -16.74 \text{ MeV}$ $a_c = -0.70 \text{ MeV}$ $a_p = 19.49 \text{ MeV}$	<u>Déviati on standard</u> <u>moyenne :</u>  $3.46 \text{ MeV}$	
$W_1$ : Formule de Weizsäcker augmentée d'un terme de Wigner		
$B(N,Z) = a_v A + a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_p \frac{\delta(A)}{A^{3/4}} + a_w \frac{ N-Z }{A}$		
$a_v = 15.76 \text{ MeV}$ $a_a = -23.88 \text{ MeV}$ $a_s = -17.91 \text{ MeV}$ $a_c = -0.71 \text{ MeV}$ $a_p = 20.74 \text{ MeV}$ $a_w = 28.45 \text{ MeV}$	<u>Déviati on standard</u> <u>moyenne :</u>  $3.22 \text{ MeV}$	
$W_2$ : Formule de Weizsäcker avec appariement remplacé par un terme $SU_{ST}(4)$		
$B(N,Z) = a_v A + a_a \frac{(N-Z)^2}{A} + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{SU(4)} \frac{\langle C_2[SU_{ST}(4)] \rangle}{A^\gamma}$		
$a_v = 15.22 \text{ MeV}$ $a_a = -13.99 \text{ MeV}$ $a_s = -16.27 \text{ MeV}$ $a_c = -0.67 \text{ MeV}$ $a_{SU(4)} = -0.58 \text{ MeV}$ $\gamma = 0.52$	<u>Déviati on standard</u> <u>moyenne :</u>  $2.88 \text{ MeV}$	



*Remarques :*

i) De plus amples détails concernant la formule de masse  $W_3$  avec symétrie  $SU_{ST}(4)$  pourront être trouvés dans la référence [Van97]. Enfin une généralisation aux hypernoyaux, basée sur algèbre  $SU_{FS}(6)$  incluant les degrés de liberté de saveur et de spin des hadrons, a également été proposée [Lev98].

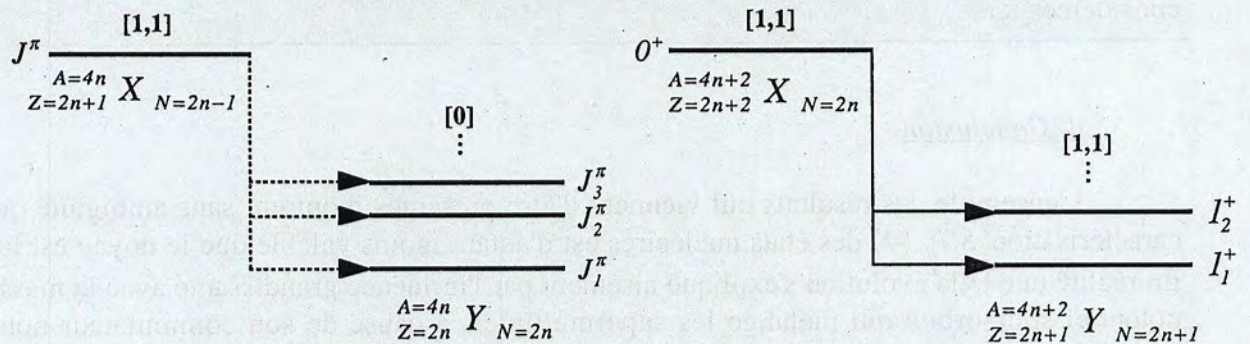
ii) Historiquement, la sensibilité des masses nucléaires à la symétrie spin-isospin  $SU_{ST}(4)$  a tout d'abord été évaluée à l'aide d'une autre combinaison que la double différence  $\delta V_{np}$ . Proposée par Franzini et Radicatti [Fra63], cette combinaison est néanmoins apparue peu sensible à la brisure de  $SU_{ST}(4)$  de sorte qu'elle ne constitue pas un test critique du modèle de Wigner.

### c- Transitions Gamow-Teller

A l'ordre le plus bas, l'opérateur responsable des transitions Gamow-Teller de décroissance  $\beta$  est donné par [Boh69] :

$$T_\mu(GT^\pm) = 2g_a \sum_\alpha s_\mu^{(\alpha)} t_{\pm 1}^{(\alpha)} = 2g_a Y_{\mu, \pm 1} \quad (2.17)$$

où les signes  $\pm$  s'appliquent respectivement aux radioactivités  $\beta^\pm$  et où  $g_a$  désigne la constante de couplage pseudo-vectorielle ( $g_a = 1.267$ ). En dehors des règles de sélection  $\Delta J = 0, 1$  ( $J = 0 \rightarrow J = 0$  interdit),  $\Delta T = 0, 1$  et  $\Delta \pi = 0$  ( $\pi$  étant la parité) qui se déduisent de (2.17), le fait que  $T_\mu(GT^\pm)$  soit un générateur de l'algèbre  $SU_{ST}(4)$  implique également que des états se transformant selon des représentations irréductibles différentes de ce groupe ne peuvent être connectés. Il en résulte donc en particulier que la décroissance  $\beta^+$  Gamow-Teller d'un noyau impair-impair  $N = Z - 2$  vers un noyau pair-pair  $N = Z$  est interdite à l'approximation  $SU_{ST}(4)$  puisqu'elle ferait passer du supermultiplet  $[2, 1, 1]$  à la représentation  $[0]$  [cf. tableau (2.2)]. Au contraire, la transition d'un système pair-pair  $N = Z - 2$  vers un noyau impair-impair  $N = Z$  est permise puisque les RI mises en jeu dans les 2 cas sont  $[1, 1]$ . Ces différents points sont résumés sur le schéma ci-dessous.



Afin de tester la validité du schéma  $SU_{ST}(4)$ , le comportement en "zigzag" qu'il prédit pour la somme des probabilités de ces transitions  $T = 1 \rightarrow T = 0$  est comparé aux valeurs expérimentales [Fir96] sur la figure suivante (2.3). On constate alors immédiatement que les



oscillations attendues sont bien présentes, mais qu'elles disparaissent progressivement avec la masse révélant ainsi une nouvelle fois l'inadaptation du formalisme  $SU_{ST}(4)$  aux noyaux lourds. Il faut tout de même préciser qu'on ne peut exclure qu'une partie des désaccords puisse s'expliquer par une inadéquation entre les transitions prises en compte pour l'évaluation de la probabilité totale. Il est en effet possible que certaines décroissances considérées dans le calcul  $SU_{ST}(4)$  n'aient pas été mises en évidence et réciproquement que les données expérimentales incluent des états qui n'appartiennent pas aux supermultiplet favorisés (ce cas de figure s'adresse plus particulièrement à la transition vers un noyau pair-pair pour laquelle une grande fragmentation en énergie est souvent observée).

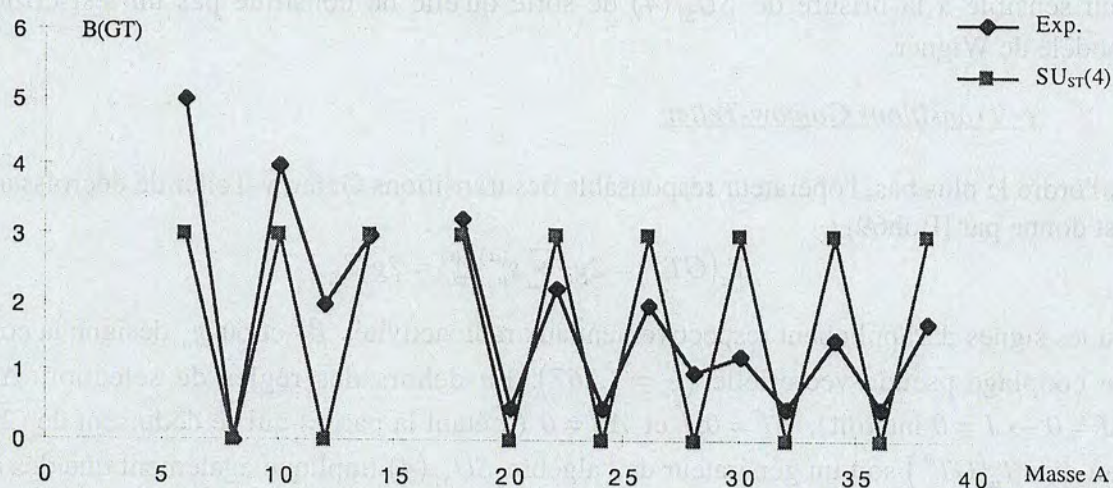


Figure (2.3) : Evolution avec la masse de la probabilité totale de transition Gamow-Teller (en unité  $g_a^2/4\pi$ ) pour la décroissance  $\beta^+$  vers un noyau  $N=Z$ . Les valeurs mesurées ainsi que celles du modèle  $SU_{ST}(4)$  de Wigner ont été représentées. En outre, les transitions vers les noyaux doublement magiques  $^{16}_8\text{O}_8$  et  $^{40}_{20}\text{Ca}_{20}$  sont exclues dans la mesure où le noyau impair-impair de départ se caractérise par des protons et neutrons n'occupant pas la même couche majeure. En conséquence, la décroissance  $\beta^+$  fait alors appel à des corrélations  $1\hbar\omega$  non considérées ici.

#### d- Conclusion

L'ensemble des résultats qui viennent d'être présentés montrent sans ambiguïté que la caractérisation  $SU_{ST}(4)$  des états nucléaires est d'autant moins valable que le noyau est lourd. En réalité une telle évolution s'explique aisément par l'influence grandissante avec la masse du potentiel spin-orbite qui mélange les supermultiplets à cause de son commutateur non nul avec l'observable de spin. En outre, la répulsion coulombienne brise également l'invariance sous le groupe  $SU_{ST}(4)$  et il peut aussi en être ainsi pour l'interaction résiduelle : à titre d'exemple, les contributions d'appariement n'ont la symétrie spin-isospin que si elles sont également intenses dans les voies isovectorielles et isoscalaires (cf. paragraphe III-1 du



chapitre 3). Par contre, l'interaction quadrupolaire d'Elliott conserve les représentations de  $SU_{ST}(4)$  en levant dynamiquement la dégénérescence orbitale à l'intérieur de chacune d'elles, par construction d'une bande rotationnelle [Ell58]. De manière plus complète, l'interaction "delta" de surface (SDI) [Gre65, Arv66], définie par  $V = -A_T \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(r_1 - R_0) + B_T$  ( $R_0$  étant le rayon du noyau et  $A_T$ ,  $B_T$  des constantes spécifiques à chaque voie d'isospin  $T$ ) et qui est connue pour constituer une bonne approximation des hamiltoniens résiduels réalistes, ne préserve pas en général la classification  $SU_{ST}(4)$  mis à part le cas où les intensités  $A_T$  sont identiques dans les canaux  $T = 0$  et  $T = 1$ .

Quantitativement, une étude directe de la validité du schéma  $SU_{ST}(4)$  a par ailleurs été effectuée par Vogel & Ormand [Vog93] en analysant le recouvrement de l'état fondamental du modèle en couches avec le sous-espace irréductible  $SU_{ST}(4)$  de plus basse énergie. Leurs résultats sont résumés dans le tableau (2.3) ci-dessous et confirment en fait l'analyse précédente en montrant l'impossibilité d'utiliser le modèle des supermultiplets de Wigner dans sa version originale au delà de la couche  $sd$ .

Couche sd	$^{20}\text{Ne} : 87$	$^{18}\text{F} : 95$
	$^{24}\text{Mg} : 51$	$^{22}\text{Na} : 70$
	$^{28}\text{Si} : 32$	$^{26}\text{Al} : 70$
	$^{32}\text{S} : 30$	$^{30}\text{P} : 56$
	$^{36}\text{Ar} : 55$	$^{34}\text{Cl} : 66$
Couche fp	$^{40}\text{Ca} : 75$	$^{52}\text{Ca} : 18$
	$^{44}\text{Ca} : 50$	$^{54}\text{Ca} : 25$
	$^{46}\text{Ca} : 30$	$^{56}\text{Ca} : 40$
	$^{48}\text{Ca} : 20$	$^{58}\text{Ca} : 65$
	$^{50}\text{Ca} : 19$	

Tableau (2.3) : Proportion du vecteur d'état associé au niveau fondamental du modèle en couches qui se transforme selon la RI énergétiquement favorisée de  $SU_{ST}(4)$

## II – Extension aux noyaux lourds par utilisation du pseudo-spin

### ① Aspects généraux

Pour commencer, considérons l'hamiltonien  $h$  du champ moyen nucléaire dont on sait qu'il est constitué dans une large approximation d'un oscillateur harmonique tridimensionnel augmenté d'un potentiel spin-orbite attractif  $-V_{so} \vec{l} \cdot \vec{s}$  ( $V_{so} > 0$ ) afin d'associer chaque fermeture de couche à l'un des nombres magiques observés. En outre, une interaction orbite-



orbite  $-V_{oo}\vec{l}^2$  ( $V_{oo} > 0$ ) est également nécessaire pour stabiliser les états de haut moment orbital de façon à se rapprocher des résultats obtenus avec un potentiel moyen plus réaliste de type Wood-Saxon :

$$h = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 - V_{so} \vec{l} \cdot \vec{s} - V_{oo} \vec{l}^2 \quad (2.18)$$

où  $m$  est la masse des nucléons (supposée identique pour protons et neutrons) et où  $\omega$  désigne la pulsation de l'oscillateur. Pour  $V_{so} = V_{oo} = 0$ , le spectre de cet hamiltonien moyen exhibe en fait un certain nombre de dégénérescences bien connues et qui s'expliquent formellement en terme d'une symétrie  $U(3)$  [Wyb74-chapitre 20]. La combinaison  $V_{so} = 4V_{oo}$  présente également un intérêt particulier dans la mesure où elle permet de restaurer dans les orbites individuelles un certain degré de dégénérescence qui définit précisément la symétrie de pseudo-spin. Pour le mettre en évidence, considérons la transformation unitaire d'hélicité  $\Lambda$  définie par :

$$\Lambda = 2i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{p} \quad (2.19)$$

Compte tenu des propriétés des matrices de Pauli, on montre alors assez facilement [Van98] que les observables de moment cinétique  $\vec{l}$ ,  $\vec{s}$  et  $\vec{j}$  sont respectivement modifiées en :

$$\Lambda \vec{l} \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \vec{l} \Lambda = \vec{l} + 2\vec{s} - \frac{2\vec{p}}{p^2}(\vec{s} \cdot \vec{p}) \quad (2.20.a)$$

$$\Lambda \vec{s} \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \vec{s} \Lambda = -\vec{s} + \frac{2\vec{p}}{p^2}(\vec{s} \cdot \vec{p}) \quad (2.20.b)$$

$$\Lambda \vec{j} \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \vec{j} \Lambda = \vec{j} \quad (2.20.c)$$

Ainsi :

$$\Lambda \vec{l}^2 \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \vec{l}^2 \Lambda = \vec{l}^2 + 4\vec{l} \cdot \vec{s} - 2\hbar^2 \quad (2.21.a)$$

$$\Lambda \vec{s}^2 \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \vec{s}^2 \Lambda = \vec{s}^2 \quad (2.21.b)$$

$$\Lambda \vec{l} \cdot \vec{s} \Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger \vec{l} \cdot \vec{s} \Lambda = -\vec{l} \cdot \vec{s} - \hbar^2 \quad (2.21.c)$$

Par conséquent, chaque orbite  $|N, l, s, j, m\rangle$  du spectre de l'hamiltonien (2.18) se transforme donc sous l'effet de  $\Lambda$  en une superposition d'états  $|N', l', s', j', m'\rangle$  avec :

$$l' = l \pm 1, \text{ selon que } j = l \pm 1/2, \quad s' = s = 1/2, \quad j' = j \text{ et } m' = m \quad (2.22)$$

Au niveau du nombre de quanta d'oscillations la situation est en revanche nettement plus complexe dans la mesure où le calcul de  $\Lambda \hat{N} \Lambda^\dagger$  introduit une non-localité [Blo95], mais qui confère néanmoins un rôle majoritaire à la couche majeure  $N' = N + 1$  dans la décomposition du vecteur  $\Lambda |N, l, s, j, m\rangle$  [Blo97]. On peut alors introduire un opérateur  $O$  assurant la projection sur cette seule valeur  $N' = N + 1$  et définir ainsi une nouvelle transformation unitaire  $U = O\Lambda$  telle que :



$$U |N, l, s, j, m\rangle = |\tilde{N}, \tilde{l}, \tilde{s}, \tilde{j}, \tilde{m}\rangle = |N+1, \left\{ \begin{smallmatrix} l+1 \\ l-1 \end{smallmatrix} \right\}, s, j = \left\{ \begin{smallmatrix} l+1/2 \\ l-1/2 \end{smallmatrix} \right\}, m\rangle \quad (2.23)$$

Dans ces conditions, toutes les états  $|N_0, l_0, s_0, j_0, m_0\rangle$  avec  $j_0 \neq N_0 + 1/2$  peuvent donc être considérés comme l'image d'une autre couche et admettent par ce biais une désignation en termes des pseudo-nombres quantiques  $\tilde{N}, \tilde{l}, \tilde{s}, \tilde{j}, \tilde{m}$  conformément à la relation ci-dessous. Une illustration d'un tel processus est en plus montrée sur la figure (2.4) de la page suivante.

$$|N_0, l_0, s_0, j_0, m_0\rangle = |\tilde{N} = N_0 - 1, \tilde{l} = \left\{ \begin{smallmatrix} l_0 + 1 \\ l_0 - 1 \end{smallmatrix} \right\}, \tilde{s}_0 = s, \tilde{j} = j_0 = \left\{ \begin{smallmatrix} l_0 + 1/2 \\ l_0 - 1/2 \end{smallmatrix} \right\}, \tilde{m} = m_0\rangle \quad (2.24)$$

Enfin, il est important de préciser que les égalités (2.20.a-c), (2.21.a-c) conservent toujours leur validité lorsqu'on remplace  $A$  par  $U$  et fournissent par voie de conséquence, l'expression des pseudo-moments cinétiques  $\tilde{l} = U \vec{l} U^+$ ,  $\tilde{s} = U \vec{s} U^+$ ,  $\tilde{j} = U \vec{j} U^+$  auxquelles sont rattachés les labels  $\tilde{l}, \tilde{s}, \tilde{j}, \tilde{m}$ . En outre, la loi (2.23) confère à l'opérateur pseudo-nombre de quanta la forme  $\hat{\tilde{N}} = U \hat{N} U^+ = \hat{N} - 1$  qui permet d'achever la réécriture du champ moyen nucléaire (2.18) à l'aide des pseudo-observables :

$$h = \hbar\omega \left( \hat{\tilde{N}} + \frac{3}{2} \right) - (4V_{oo} - V_{so}) \tilde{l} \cdot \tilde{s} - V_{oo} \tilde{l}^2 + \hbar\omega + V_{so} - 2V_{oo} \quad (2.24)$$

Pour  $V_{so} = 4V_{oo}$ , la disparition du pseudo-couplage spin-orbite implique alors les dégénérescences annoncées au départ et qui apparaissent donc précisément entre les orbites  $|\tilde{N}, \tilde{l}, \tilde{s}, \tilde{j}, \tilde{m}\rangle$  avec  $\tilde{j} = \tilde{l} \pm 1/2$ , c'est-à-dire dans les doublets  $\left\{ \begin{smallmatrix} (l, j = l + 1/2) \\ (l' = l + 2, j' = l' - 1/2) \end{smallmatrix} \right\}$  de chaque couche majeure.

Historiquement, la notion de pseudo-spin a tout d'abord été introduite en 1969 pour s'accomoder de l'observation de doublets d'orbitales quasi-dégénérées (Hecht & Adler [Hec69], Arima & al [Ari69]). Des calculs de type champ moyen relativiste [Bah92] ont par la suite permis de retrouver approximativement l'égalité  $V_{so} = 4V_{oo}$  dont l'origine microscopique réelle a finalement été mise en évidence par Ginocchio [Gin97, Gin98]. Son étude montre en effet que les observables de pseudo-spin sont la limite non-relativiste des générateurs d'une symétrie  $SU(2)$  qui laisse invariante l'hamiltonien de Dirac en présence de potentiels scalaire et vectoriel égaux en valeur absolue mais de signes opposés, ce qui semble de plus être une caractéristique universelle de toutes les théories nucléaires relativistes [Ser86, Coh91]. En outre, les transformations mathématiques permettant de passer des orbites aux pseudo-orbites ont également fait l'objet de nombreux travaux initiés par Bohr & al qui proposèrent d'utiliser l'opérateur  $2i \vec{s} \cdot \vec{r}/r$  [Boh82]. Une généralisation visant également à réaliser correctement la modification de l'état radial a ensuite été proposée par Castanos & al [Cas92] et enfin, les études microscopiques dont il vient d'être question [Blo95, Gin98] ont mis en exergue la pertinence de la transformation que nous avons utilisée. Précisons encore que sur le plan pratique, le concept de pseudo-spin a déjà été appliqué pour élucider la structure de noyaux déformés [Boh82] et superdéformés [Dud87], mais aussi pour expliquer les bandes identiques



[Naz90, Mott91] ou encore pour élaborer un schéma de couplage effectif dans le cadre du modèle en couches [Tro95].

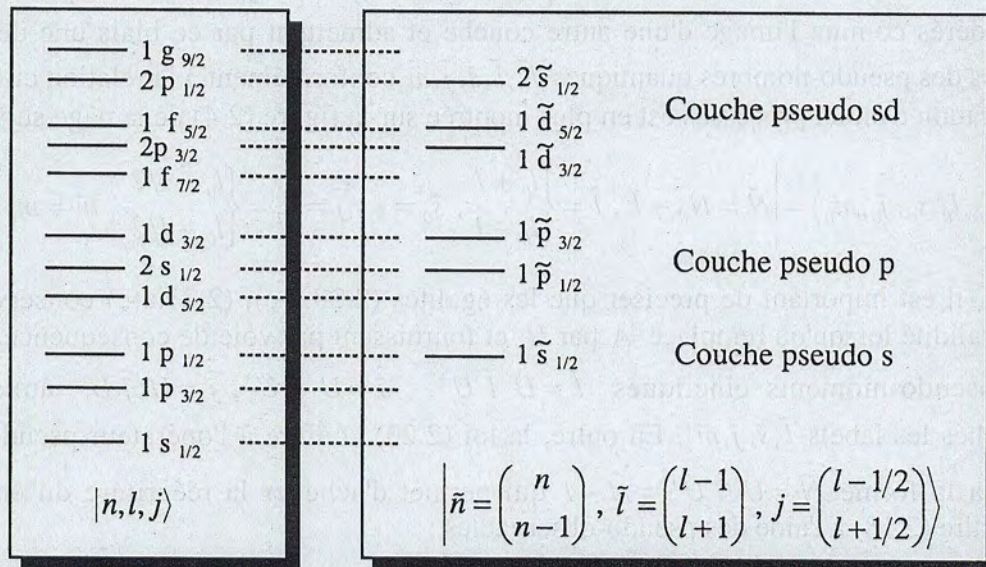


Figure (2.4) : Caractérisation en termes de pseudo-nombres quantiques des différentes orbites du spectre de l'hamiltonien de champ moyen nucléaire (2.18).  $n$  désigne le nombre quantique radial relié au nombre total de quanta par la relation  $N = 2(n - l) + l$ .

## ② Construction et examen critique d'une pseudo-classification de Wigner

De la même manière que les symétries de spin  $SU_s(2)$  et d'isospin  $SU_t(2)$  peuvent être combinées pour former l'invariance  $SU_{st}(4)$ , il est tout à fait possible d'effectuer une opération similaire en utilisant les opérateurs de pseudo-spin à la place de ceux de spin. On aboutit alors à une pseudo-symétrie de Wigner, notée  $SU_{\tilde{s}t}(4)$  ou pseudo- $SU_{st}(4)$  [Str72] et sous laquelle un hamiltonien  $H$  sera invariant s'il vérifie, conformément à (2.1), les relations de commutation suivantes :

$$\left[ H, \sum_{\alpha} \tilde{s}_{\mu}^{(\alpha)} \right] = \left[ H, \sum_{\alpha} t_{\mu}^{(\alpha)} \right] = \left[ H, \sum_{\alpha} \tilde{s}_{\mu}^{(\alpha)} t_{\nu}^{(\alpha)} \right] = 0 \quad (2.25)$$

A titre d'exemple, le champ moyen (2.18) avec  $V_{so} = 4V_{oo}$  respecte chacune de ces conditions. Mathématiquement, l'algèbre  $SU_{\tilde{s}t}(4)$  est donc rigoureusement identique à celle du groupe  $SU_{st}(4)$  de sorte que l'ensemble de la discussion du paragraphe I-1 demeure valable en termes de pseudo-nombres quantiques. C'est ainsi que les états propres d'un hamiltonien respectant les contraintes (2.25), seront désignés sous la forme  $\left| \mathcal{N}, [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3], \tilde{\alpha}, \tilde{L}\tilde{M}_L, \tilde{S}\tilde{M}_S, TM_T \right\rangle$  où



$[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3]$  caractérise les RI de  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  et où  $\tilde{L}\tilde{M}_L, \tilde{S}\tilde{M}_S$  résultent du couplage des pseudo-moments orbitaux et de spin de chacun des nucléons. Il faut de plus préciser que du point de vue énergétique, le pseudo-supermultiplet fondamental est toujours donné par les règles du tableau (2.2) à cause du développement essentiellement en surface des corrélations entre nucléons. Il en résulte en effet que les éléments de matrice de l'interaction résiduelle ne sont pas vraiment sensibles à la structure radiale de l'état et ainsi le problème de  $\mathcal{N}$  particules dans une pseudo-couche est approximativement identique à celui de  $\mathcal{N}$  particules dans une couche normale. Cette équivalence est en fait rigoureusement valable pour une interaction de surface à portée nulle qui est connue pour constituer une idéalisation raisonnable de l'hamiltonien résiduel réel.

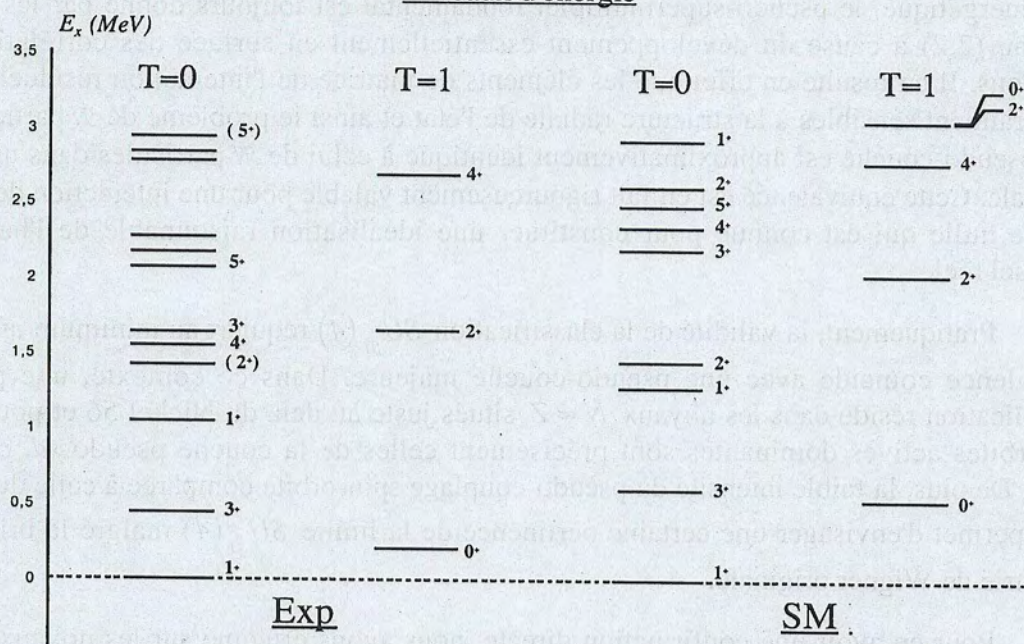
Pratiquement, la validité de la classification  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  requiert au minimum que l'espace de valence coïncide avec une pseudo-couche majeure. Dans ce contexte, une possibilité d'application réside dans les noyaux  $N \approx Z$  situés juste au delà du Nickel 56 et pour lesquels les orbites actives dominantes sont précisément celles de la couche pseudo- $sd$ , c'est-à-dire  $pf_{5/2}$ . De plus, la faible intensité du pseudo-couplage spin-orbite comparée à celle du couplage réel, permet d'envisager une certaine pertinence de la limite  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  malgré la brisure de la symétrie de Wigner originale.

Pour en avoir une confirmation directe, nous avons effectué sur les noyaux de masse  $A \approx 60$  une analyse similaire à celle réalisée par Vogel & Ormand dans la couche  $sd$  (cf. paragraphe I-2-d de ce chapitre) en déterminant les sous-espaces irréductibles de  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  qui interviennent dans la structure des vecteurs propres obtenus par diagonalisation d'une interaction réaliste [Van99]. Dans le cas ici considéré, l'hamiltonien résiduel utilisé comme point de départ inclut l'orbite  $g_{9/2}$  et correspond à une matrice  $G$  avec monopoles ajustés [Cau96]. Son utilisation dans le Gallium 62 a d'ailleurs fourni récemment d'excellents résultats [Vin98]. En outre, l'usage de cette même interaction pour le système à 2 particules ( $^{58}\text{Cu}$ ) montre que même si la couche  $g_{9/2}$  est importante pour l'obtention d'une spectroscopie correcte, son intervention dans les états de basse énergie reste faible en étant typiquement de l'ordre de 1% mis à part dans le niveau  $J=0, T=1$  où elle atteint 8.5%. Par conséquent, l'hamiltonien a ainsi pu être renormalisé à l'espace pseudo- $sd$  par utilisation de la méthode de projection [Bar75]. Le spectre obtenu avec cette nouvelle interaction de l'espace  $pf_{5/2}$  s'identifie en fait virtuellement dans sa partie basse énergie à celui calculé avec l'orbite  $g_{9/2}$ . De plus, comme on peut le constater sur les 2 pages suivantes ainsi que sur les résultats présentés à la fin du chapitre 3, les niveaux d'énergie évalués s'accordent raisonnablement avec les données expérimentales. Concernant plus spécifiquement la pseudo-classification de Wigner, nous avons représenté ci-après dans le cas du  $^{58}\text{Cu}$  et du  $^{60}\text{Zn}$ , le recouvrement des vecteurs d'état des premiers niveaux avec les 2 représentations énergétiquement favorisées de  $SU_{\tilde{S}T}(4)$ . Par ailleurs, dans chacun des sous-espaces irréductibles, une analyse orbitale en terme des RI du groupe  $SU_L(3)$  a également été menée. (L'intervention d'une telle algèbre se justifie par la classification (2.7) certes relative à une couche  $sd$ , mais qui reste valable pour la couche pseudo- $sd$  moyennant l'utilisation des pseudo-nombres quantiques).



# Cuivre 58 ( $N = Z = 29$ )

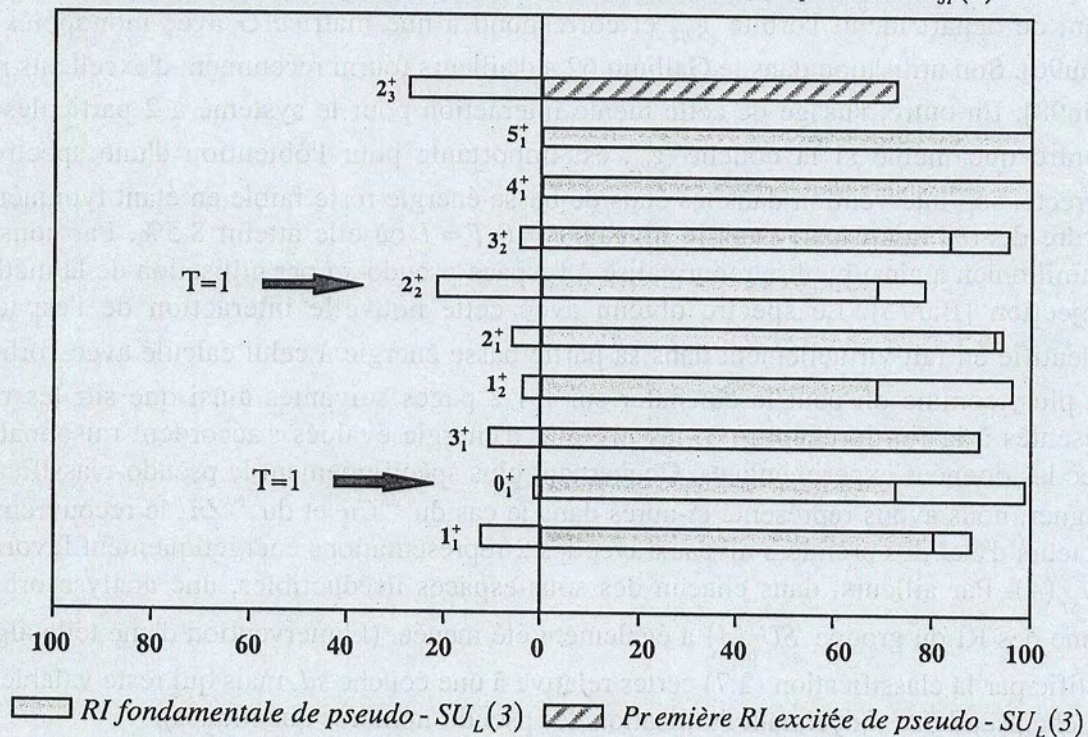
## Niveaux d'énergie



## Analyse des états

Pre mière RI excitée de pseudo -  $SU_{ST}(4)$

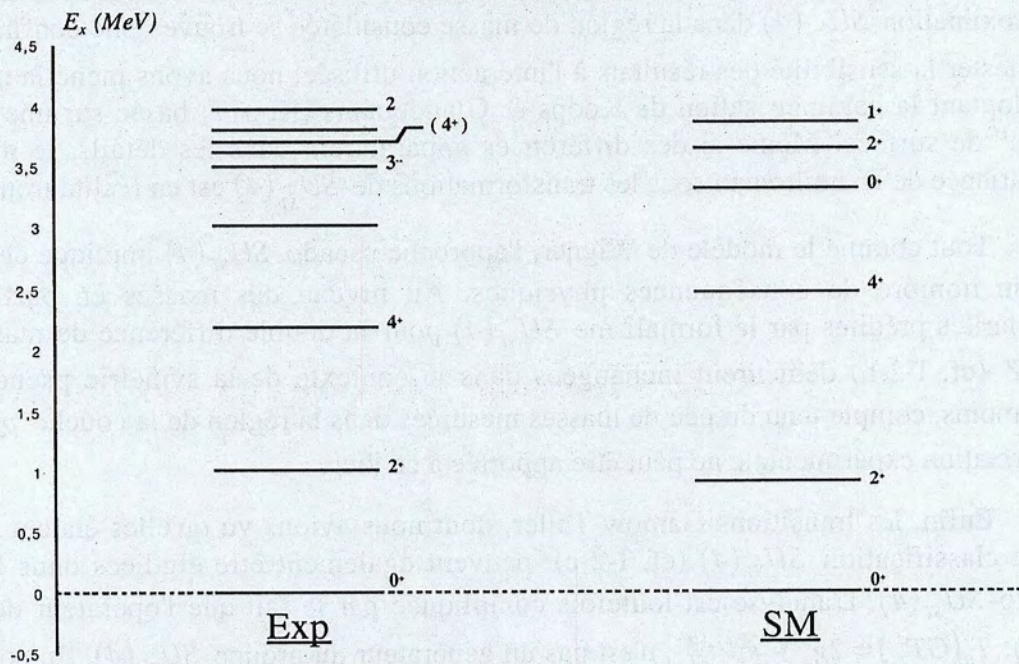
RI fondamentale de pseudo -  $SU_{ST}(4)$





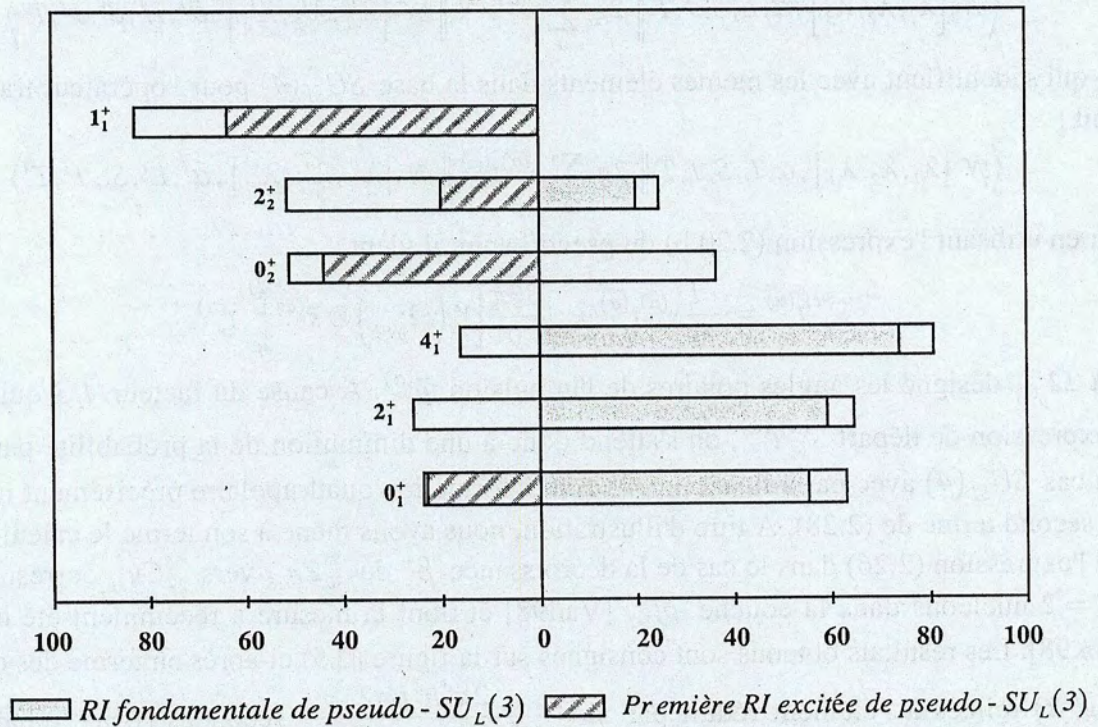
# Zinc 60 ( $N = Z = 30$ )

## Niveaux d'énergie



## Analyse des états

Première RI excitée de pseudo- $SU_{ST}(4)$       RI fondamentale de pseudo- $SU_{ST}(4)$





Il apparaît ainsi clairement que tous les niveaux de basse énergie présentent une large composante dans le sous-espace  $SU_{ST}(4)$  favorisé. Signalons également que des résultats similaires ont été obtenus pour le Cuivre 60 ou le Nickel 60 et en conséquence la validité de l'approximation  $SU_{ST}(4)$  dans la région de masse considérée se trouve donc confirmée. Enfin, pour tester la sensibilité des résultats à l'interaction utilisée, nous avons mené la même étude en adoptant la paramétrisation de Koops & Glaudemans [Koo77] basée sur une interaction "delta" de surface. Même si des différences apparaissent dans les détails, le même degré d'invariance de l'hamiltonien sous les transformations de  $SU_{ST}(4)$  est en réalité trouvé.

Tout comme le modèle de Wigner, l'approche pseudo- $SU_{ST}(4)$  implique également un certain nombre de conséquences physiques. Au niveau des masses en particulier, les singularités prédites par le formalisme  $SU_{ST}(4)$  pour la double différence de masse  $\delta V_{np}$  en  $N = Z$  (cf. I-2-b) demeurent inchangées dans le contexte de la symétrie pseudo- $SU_{ST}(4)$ . Néanmoins, compte tenu du peu de masses mesurées dans la région de la couche  $pf_{5/2}$ , aucune confirmation expérimentale ne peut être apportée à ce jour.

Enfin, les transitions Gamow-Teller, dont nous avons vu qu'elles étaient contraintes par la classification  $SU_{ST}(4)$  (cf. I-2-c), peuvent également être étudiées dans l'hypothèse pseudo- $SU_{ST}(4)$ . L'analyse est toutefois compliquée par le fait que l'opérateur de transition (2.17),  $T_\mu(GT^\pm) = 2g_a \sum_\alpha s_\mu^{(\alpha)} t_{\pm}^{(\alpha)}$ , n'est pas un générateur du groupe  $SU_{ST}(4)$ . En conséquence, le calcul des probabilités de transition nécessite maintenant le calcul explicite d'éléments réduits de la forme :

$$\left\langle \mathcal{N}, [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3], \tilde{\alpha}, \tilde{L}, \tilde{S}, J, T \parallel 2g_a \sum_\alpha s^{(\alpha)} t^{(\alpha)} \parallel \mathcal{N}, [\tilde{\lambda}'_1, \tilde{\lambda}'_2, \tilde{\lambda}'_3], \tilde{\alpha}', \tilde{L}', \tilde{S}', J', T' \right\rangle \quad (2.26)$$

et qui s'identifient avec les mêmes éléments dans la base  $SU_{ST}(4)$  pour l'opérateur transformé, soit :

$$\left\langle \mathcal{N}, [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3], \alpha, L, S, J, T \parallel 2g_a \sum_\alpha \tilde{s}^{(\alpha)} t^{(\alpha)} \parallel \mathcal{N}, [\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3], \alpha', L', S', J', T' \right\rangle \quad (2.27)$$

Or en utilisant l'expression (2.20.b) du pseudo-spin, il vient :

$$\tilde{s}_\mu^{(\alpha)} t_\nu^{(\alpha)} = -\frac{1}{3} s_\mu^{(\alpha)} t_\nu^{(\alpha)} + \sqrt{\frac{32\pi}{9}} \left[ Y_2(\Omega_{\vec{p}^{(\alpha)}}) \otimes \tilde{s}^{(\alpha)} \right]_{\mu}^{(1)} t_\nu^{(\alpha)} \quad (2.28)$$

où  $\Omega_{\vec{p}^{(\alpha)}}$  désigne les angles polaires de l'impulsion  $\vec{p}^{(\alpha)}$ . A cause du facteur  $1/3$  qui précède l'expression de départ  $s^{(\alpha)} t^{(\alpha)}$ , on s'attend donc à une diminution de la probabilité par rapport au cas  $SU_{ST}(4)$  avec par ailleurs un effet de déformation quadrupolaire précisément induit par le second terme de (2.28). A titre d'illustration, nous avons mené à son terme le calcul complet de l'expression (2.26) dans le cas de la décroissance  $\beta^+$  du  $^{58}_{30}\text{Zn}_{28}$  vers  $^{58}_{29}\text{Cu}_{29}$  correspondant à  $N = 2$  nucléons dans la couche  $pf_{5/2}$  [Van98] et dont la mesure a récemment été effectuée [Jok98]. Les résultats obtenus sont consignés sur la figure (2.5) ci-après en terme des quantités  $\log(ft)$  reliées à l'élément réduit par  $ft = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \text{Ln}2}{m^5 c^4 \langle \| T(GT) \| \rangle^2}$  secondes [Bru77-chapitre12].



Signalons encore que les calculs ont été effectués en supposant des structures orbitales correspondant à la classification d'Elliott [Ell58] étendue aux pseudo-couches [Limite  $SU_L(3)$ ] soit avec la notation spectroscopique  $^{2\tilde{S}+1}\tilde{L}$  :

$$|{}^1\tilde{S}, J=0, T=1\rangle = \sqrt{\frac{5}{9}} |{}^1\tilde{s}^2, {}^1\tilde{S}, J=0, T=1\rangle + \sqrt{\frac{4}{9}} |\tilde{d}^2, {}^1\tilde{S}, J=0, T=1\rangle \quad (2.29.a)$$

$$|{}^3\tilde{S}, J=1, T=0\rangle = \sqrt{\frac{5}{9}} |\tilde{s}^2, {}^3\tilde{S}, J=1, T=0\rangle + \sqrt{\frac{4}{9}} |\tilde{d}^2, {}^3\tilde{S}, J=1, T=0\rangle \quad (2.29.b)$$

$$|{}^3\tilde{D}, J=1, T=0\rangle = \sqrt{\frac{7}{9}} |\tilde{s}^2, {}^3\tilde{D}, J=1, T=0\rangle \pm \sqrt{\frac{2}{9}} |\tilde{d}^2, {}^3\tilde{D}, J=1, T=0\rangle \quad (2.29.c)$$

où les signes  $\pm$  correspondent respectivement à des déformations oblate ou prolate.

Enfin pour comparaison, les valeurs dans l'hypothèse  $SU_{ST}(4)$  sont également mentionnées. On constate alors immédiatement que seule la modélisation pseudo- $SU_{ST}(4)$  est en mesure de fournir une vision qualitative correcte de la décroissance  $\beta$  dans la région  $A \approx 60$ , confirmant ainsi les conclusions précédentes tant qu'à la pertinence de cette invariance comme point de départ d'une interprétation modèle en couches des noyaux du début de l'espace  $p f_{5/2} g_{9/2}$ .

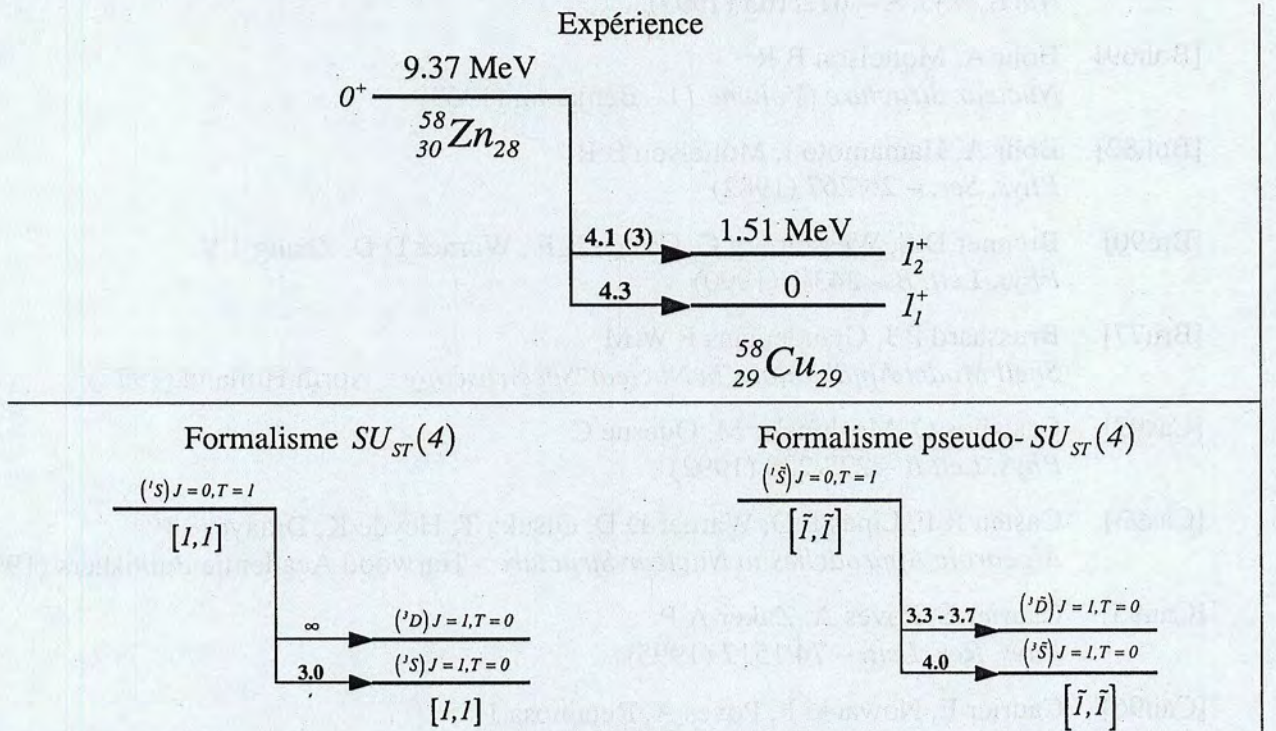


Figure (2.5) : Schéma de décroissance Gamow-Teller du Zinc 58 en comparaison avec les prédictions  $SU_{ST}(4)$  et  $SU_{ST}(4)$ . Dans tous les cas un facteur de "quenching" de  $\sqrt{0.6}$  a été adopté [Cau95] et pour le calcul pseudo- $SU_{ST}(4)$ , les valeurs 3.3 et 3.7 dépendent respectivement de la nature prolate ou oblate de la déformation (cf. 2.29.c)



## Références

- [Ari47] Arima A, Harvey M, Shimizu K  
*Phys. Lett. B* – 30/517 (1969)
- [Arv66] Arvieu R, Moszkowski S A  
*Phys. Rev.* – 145/830 (1966)
- [Aud93] Audi G, Wapstra A H  
*Nucl. Phys. A* – 565/1 (1993)
- [Bah92] Bahri C, Draayer J P, Moszkowski S A  
*Phys. Rev. Lett.* – 68/2133 (1992)
- [Bar75] Barrett B R, Halbert E C, McGrory J B  
*Ann. Phys.* – 90/321 (1975)
- [Blo95] Blokhin A L, Draayer J P  
*Phys. Rev. Lett.* – 74/4149 (1995)
- [Blo97] Blokhin A L, Beuschel T, Draayer J P, Bahri C  
*Nucl. Phys. A* – 612/163 (1997)
- [Boh69] Bohr A, Mottelson B R  
*Nuclear Structure (Volume 1)* – Benjamin (1969)
- [Boh82] Bohr A, Hamamoto I, Mottelson B R  
*Phys. Scr.* – 26/267 (1982)
- [Bre90] Brenner D S, Wesselborg C, Casten R F, Warner D D, Zhang J Y  
*Phys. Lett. B* – 243/1 (1990)
- [Bru77] Brussaard P J, Glaudemans P W M  
*Shell Model Applications in Nuclear Spectroscopy* – North Holland (1977)
- [Cas92] Castaños O, Moshinsky M, Quesne C  
*Phys. Lett B* – 277/238 (1992)
- [Cas93] Casten R F, Lipas P O, Warner D D, Otsuka T, Heyde K, Draayer J P  
*Algebraic Approaches to Nuclear Structure* – Harwood Academic Publishers (1993)
- [Cau95] Caurier E, Poves A, Zuker A P  
*Phys. Rev. Lett.* – 74/1517 (1995)
- [Cau96] Caurier E, Nowacki F, Poves A, Retamosa J  
*Phys. Rev. Lett.* – 77/1954 (1996)
- [Coh91] Cohen T D, Furnstahl R J, Griegel D K  
*Phys. Rev. Lett.* – 67/961 (1991)
- [Dud87] Dudek J, Nazarewicz W, Szymanski Z, Leander G A  
*Phys. Rev. Lett.* – 59/1405 (1987)



- [Ell58] Elliott J P  
*Proc. Roy. Soc. (London) A* – 245/128 et 245/562 (1958)
- [Fir96] Firestone R B  
*Table of Isotopes* – Wiley Interscience (1996)
- [Fra63] Franzini P, Radicati L A  
*Phys. Lett.* – 6/322 (1963)
- [Gin97] Ginocchio J N  
*Phys. Rev. Lett.* – 78/436 (1997)
- [Gin98] Ginocchio J N, Leviatan A  
*Phys. Lett. B* – 425/1 (1998)
- [Gre65] Green I M, Moszkowski S A  
*Phys. Rev.* – 139/790
- [Ham62] Hamermesh M  
*Group Theory and its Application to Physical Problems* – Addison Wesley (1962)
- [Has99] Hasegawa M, Kaneko K  
Preprint <http://www.xxx.lanl.gov/nucl-th/9907009> (1999)
- [Hec69] Hecht K T, Adler A  
*Nucl. Phys. A* – 137/129 (1969)
- [Hei32] Heisenberg W  
*Z. Phys.* – 77/1 (1932)
- [Hun37] Hund F  
*Z. Phys.* – 105/202 (1937)
- [Jok98] Jokinen A & al  
*Eur. Phys. J. A* – 3/271 (1998)
- [Koo75] Koops J E, Glaudemans P W M  
*Z. Phys. A* – 280/181 (1977)
- [Lev98] Lévai G, Cseh J, Van Isacker P, Juillet O  
*Phys. Lett. B* – 433/250
- [Mott91] Mottelson B R  
*Nucl. Phys. A* – 522/1 (1991)
- [Naz90] Nazarewicz W, Twin P J, Fallon P, Garrett J D  
*Phys. Rev. Lett.* – 64/1654 (1990)
- [Rac43] Racah G  
*Phys. Rev.* – 63/367 (1943)
- [Sat97] Satula W, Dean D J, Gary J, Mizutori S, Nazarewicz W  
*Phys. Lett. B* – 407/103 (1997)



- [Ser86] Serot B D, Walecka J D  
in *Advances in Nuclear Physics (Volume 16)* - Plenum (1986)
- [Str72] Strottman D  
*Nucl. Phys. A* – 188/488 (1972)
- [Tal93] Talmi I  
*Simple Models of Complex Nuclei* - Harwood (1993)
- [Tro95] Troltenier D, Bahri C, Draayer J P  
*Nucl. Phys. A* – 586/53 (1995)
- [Van95] Van Isacker P, Warner D D, Brenner D S  
*Phys. Rev. Lett.* – 74/4607 (1995)
- [Van97] Van Isacker P, Juillet O, Gjelsten B K  
*Foundations of Physics* – 27/1047 (1997)
- [Van98] Van Isacker P  
*Private Communication* (1998)
- [Van99] Van Isacker P, Juillet O, Nowacki F  
*Phys. Rev. Lett.* – 82/2060 (1999)
- [Vin98] Vincent S M & al  
*Phys. Lett. B* – 437/264
- [Vog93] Vogel P, Ormand W E  
*Phys. Rev. C* – 47/623 (1993)
- [Wig37] Wigner E P  
*Phys. Rev.* - 51/106 (1937)
- [Wyb74] Wybourne B G  
*Classical Groups for Physicists* – Wiley (1974)
- [Zel96] Zeldes N  
*Handbook of Nuclear Properties* – Clarendon Press, Oxford (1996)
- [Zha89] Zhang J Y, Casten R F, Brenner D S  
*Phys. Lett. B* – 227/1 (1989)



### Chapitre 3

## **Réalisation en boson des invariances de la ligne $N=Z$**

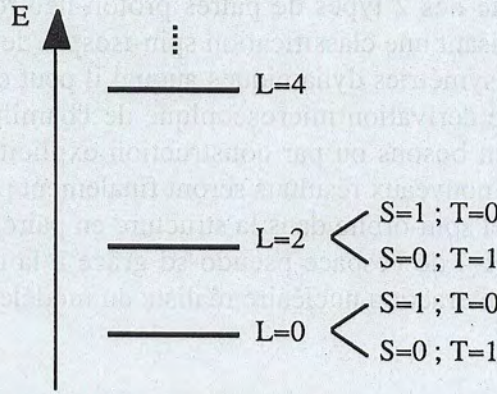
L'appréhension des comportements collectifs du noyau dans le cadre des approches de bosons en interaction (IBM) a déjà été abordée au chapitre 1 de ce mémoire pour illustrer la notion de symétrie dynamique. Rappelons simplement que les modèles IBM constituent une troncation du modèle en couches à des états formés de paires de nucléons de valence traitées comme des bosons et se décomposant en général sur plusieurs orbites individuelles couplées à des moments cinétiques caractéristiques du modèle. Le présent chapitre vise précisément à décrire et à utiliser une de ces approximations appelée IBM-4 et adaptée aux noyaux  $N = Z$  grâce à la prise en compte des 2 types de paires proton-neutron ( $T = 0$  et  $T = 1$ ) dans une structure algébrique autorisant une classification spin-isospin de Wigner. Après avoir présenté en détail le modèle et les symétries dynamiques auquel il peut donner naissance, l'accent sera mis sur les possibilités de dérivation microscopique de l'hamiltonien à partir des techniques classiques d'expansions en bosons ou par construction explicite des états de bosons dans le modèle en couches. Deux nouveaux résultats seront finalement présentés concernant d'une part le rôle joué par le potentiel spin-orbite dans la structure en paires des noyaux  $N = Z$  et d'autre part la spectroscopie IBM-4 de l'espace pseudo-sd grâce à la diagonalisation complète d'un hamiltonien déduit d'une interaction nucléaire réaliste du modèle en couches.



## I – Modèle IBM-4

### ① Description des bosons

Proposée en 1981 par Elliott & Evans [Ell81], l'approche IBM-4 ambitionne initialement de décrire les noyaux légers  $N \approx Z$  pour lesquels une classification  $L$ - $S$  des nucléons de valence constitue un bon schéma d'approximation. Logiquement, les bosons de IBM-4 sont donc décrits dans le cadre de ce couplage où les configurations spatialement symétriques ( $L$  pair,  $S+T$  impair) sont en outre énergétiquement favorisées par le caractère attractif et à courte portée de l'interaction nucléaire résiduelle [Tal93-chapitre 11]. A titre d'illustration, l'organisation typique des niveaux d'énergie d'un système proton-neutron dans le schéma  $L$ - $S$  est représenté sur la figure suivante:



**Figure (3.1) :** Spectre schématique de 2 nucléons soumis à une interaction résiduelle idéale de portée nulle  $-V_0 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$  en l'absence de potentiel spin-orbite

De façon cohérente avec les troncations IBM-1,2 ou 3 qui ne retiennent que les degrés de liberté monopolaires ( $J=0$ ) et quadrupolaires ( $J=2$ ), le modèle IBM-4 se limite alors à considérer des bosons caractérisés par un moment orbital  $l=0$  ou  $l=2$  avec en plus dans chaque cas un spin intrinsèque  $s$  et un isospin  $t$  donnés par  $(st) = (01), (10)$ , soit finalement :

$$b_{l,m_l,s,m_s,t,m_t}^+ \text{ avec } \begin{cases} (lst) = (001), (010), (201), (210) \\ m_l = -l \rightarrow l ; m_s = -s \rightarrow s ; m_t = -t \rightarrow t \end{cases} \quad (3.1)$$

ou encore en notation couplée :

$$b_{(ls)j,m_j,t,m_t}^+ \text{ où } \begin{cases} j = 0, 2 \text{ pour la voie isovectorielle } t = 1 \\ j = l^2, 2, 3 \text{ pour le canal isoscalaire } t = 0 \\ m_j = -j \rightarrow j ; m_t = -t \rightarrow t \end{cases} \quad (3.2)$$



Il est d'ailleurs important de préciser que dans cette optique, les nombres quantiques  $l$  et  $s$  des bosons ne jouent qu'un rôle auxiliaire sans nécessaire connexion avec le moment cinétique orbital et le spin des paires de nucléons que représentent ces bosons. En conséquence, l'applicabilité du modèle IBM-4 n'est pas limitée comme on pourrait le croire aux noyaux légers. Dans toute région de la vallée  $N \approx Z$  où 2 nucléons de valence se corréleront à basse énergie pour former des états dont le moment cinétique et l'isospin sont donnés par (3.2), il est à priori possible d'utiliser IBM-4 et ce même si un fort potentiel spin-orbite détruit toute pertinence d'une nomenclature  $L$ - $S$ . Ce point sera particulièrement illustré par les calculs présentés au paragraphe IV de ce chapitre concernant les noyaux situés au-delà du  $^{56}\text{Ni}$  et où les labels  $(l, s)$  des bosons seront associés au pseudo-moment orbital  $\tilde{L}$  et de spin  $\tilde{S}$  d'une paire collective de nucléons dans la couche  $(\tilde{d}_{3/2}, \tilde{d}_{5/2}, \tilde{s}_{1/2})$ .

## ② Structure algébrique

Comme pour tous les modèles faisant appel à la seconde quantification, la connexion entre IBM-4 et la théorie des groupes provient du résultat général démontré au chapitre 1 et selon lequel les vecteurs d'un système de  $\mathcal{N}$  bosons se transforment conformément à la représentation irréductible symétrique  $[\mathcal{N}]$  d'un groupe unitaire dont la dimension coïncide avec le nombre d'états individuels (cf. chapitre 1 II-3). Pour IBM-4, ce groupe de base est donc  $U(36)$  avec les combinaisons  $b_{l_1, m_{l_1}, s_1, m_{s_1}, t_1, m_{t_1}}^+, b_{l_2, m_{l_2}, s_2, m_{s_2}, t_2, m_{t_2}}$  pour générateurs. En conséquence, les états IBM-4 répondent tous au schéma général de classification donné ci-dessous :

$$\left| \begin{array}{cccc} U(36) & \supset \dots \supset & SO_J(3) & \otimes & SO_T(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{N}] & \eta & JM_J & & TM_T \end{array} \right\rangle \quad (3.3)$$

où les algèbres  $SO_J(3)$  et  $SO_T(3)$  assurent respectivement la conservation du moment cinétique total  $J_\mu = L_\mu + S_\mu$  et de l'isospin  $T_\mu$  ( $\mu = -1, 0, 1$ ) avec :

$$\triangleright L_\mu = \sqrt{10} \left[ b_{2,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{2,0,1} + b_{2,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{2,1,0} \right]_{M_L=\mu, M_S=0, M_T=0}^{L=1, S=0, T=0} \quad (3.4)$$

(moment cinétique orbital)

$$\triangleright S_\mu = \sqrt{2} \left[ b_{0,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{0,1,0} + \sqrt{5} b_{2,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{2,1,0} \right]_{M_L=0, M_S=\mu, M_T=0}^{L=0, S=1, T=0} \quad (3.5)$$

(moment cinétique de spin)

$$\triangleright T_\mu = \sqrt{2} \left[ b_{0,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{0,0,1} + \sqrt{5} b_{2,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{2,0,1} \right]_{M_L=0, M_S=0, M_T=\mu}^{L=0, S=0, T=1} \quad (3.6)$$



Au niveau des symétries dynamiques, une multitude de chaînes s'avèrent en mesure d'effectuer la réduction de  $U(36)$  dans le groupe d'invariance  $SO_J(3) \otimes SO_T(3)$ . Leur dénombrement a été récemment effectué par Kota [Kot99] mais par simplicité, nous nous limiterons aux limites préservant le couplage  $L$ - $S$  des bosons et qui sont alors données par :

$$\blacksquare U(36) \supset \left[ U_L(6) \supset \left\{ \begin{array}{c} U_L(5) \supset SO_L(5) \\ SU_L(3) \\ SO_L(6) \supset SO_L(5) \end{array} \right\} \supset SO_L(3) \right] \otimes \dots$$

$$[U_{ST}(6) \supset SU_S(3) \otimes SU_T(3) \supset SO_S(3) \otimes SO_T(3)] \supset SO_J(3) \otimes SO_T(3) \quad (3.7)$$

$$\blacksquare U(36) \supset \left[ U_L(6) \supset \left\{ \begin{array}{c} U_L(5) \supset SO_L(5) \\ SU_L(3) \\ SO_L(6) \supset SO_L(5) \end{array} \right\} \supset SO_L(3) \right] \otimes \dots$$

$$[U_{ST}(6) \supset SO_{ST}(6) \approx SU_{ST}(4) \supset SO_S(3) \otimes SO_T(3)] \supset SO_J(3) \otimes SO_T(3) \quad (3.8)$$

Des générateurs pour les groupes intermédiaires de ces diverses réductions pourront être trouvés dans le tableau (3.1) de la page suivante.

La dernière décomposition (3.8) mérite en réalité une attention particulière dans la mesure où elle fait apparaître une algèbre de spin-isospin  $SU_{ST}(4)$  analogue à celle que nous avons étudiée au niveau du modèle en couches dans le chapitre précédent et dont nous savons qu'elle engendre une classification approximativement valable dans les noyaux légers. La connexion des représentations communes aux espaces de fermions et de bosons peut alors permettre, moyennant certaines approximations tant qu'à la structure orbitale de l'état, de construire un hamiltonien IBM-4 phénoménologique avec symétrie dynamique  $SU_{ST}(4)$ . C'est précisément une telle démarche qui a été utilisée dans la couche  $sd$  en imposant une limite orbitale telle  $SO_L(6)$  pour  $^{30}P$  [Han87] ou de manière plus réaliste en s'appuyant sur une analyse modèle en couches des niveaux expérimentaux [Hal84, Hal85]. Il faut néanmoins préciser que la validité de la limite  $SU_{ST}(4)$  de l'IBM-4 n'est pas nécessairement restreinte aux systèmes légers en raison de la liberté qu'offre la définition du moment orbital et du spin intrinsèque des bosons : par exemple, en incorporant dans ces quantités certains effets liés au potentiel spin-orbite, il est tout à fait envisageable que la symétrie  $SU_{ST}(4)$  soit une bonne approximation dans une description en boson de certains noyaux lourds bien qu'étant fortement brisée au niveau du modèle en couches.

Signalons encore dans un tout autre contexte, que les autres limites de IBM-4 sont essentiellement basées sur la décomposition de  $U(36)$  dans les sous-groupes  $SO(36)$ ,  $U_s(6) \otimes U_d(30)$  (séparation des bosons  $s$  et  $d$ ) ou  $U_o(18) \otimes U_l(18)$  (séparation des bosons  $t=0$  et  $t=1$ ) mais peu d'applications ont été trouvées à ce jour.



$U_L(6)$	$\left\{ \sqrt{3} \left[ b_{l_1,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{l_2,0,1} + b_{l_1,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{l_2,1,0} \right]_{M_L, M_S=0, M_T=0}^{L,S=0,T=0} \right\}_{l_1, l_2, L, M_L}$
$U_L(5)$	$\left\{ \sqrt{3} \left[ b_{2,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{2,0,1} + b_{2,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{2,1,0} \right]_{M_L, M_S=0, M_T=0}^{L,S=0,T=0} \right\}_{L=0 \rightarrow 4, M_L=-L \rightarrow L}$
$SU_L(3)$	$\left\{ Q_\mu^{l, \chi=\pm\sqrt{7}/2} \right\}_{\mu=-2 \rightarrow 2}, \left\{ L_\mu \right\}_{\mu=-1 \rightarrow 1}$
$SO_L(6)$	$\left\{ Q_\mu^{l, \chi=0} \right\}_{\mu=-2 \rightarrow 2}, \left\{ L_\mu \right\}_{\mu=-1 \rightarrow 1}$
$SO_L(5)$	$\left\{ \sqrt{3} \left[ b_{2,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{2,0,1} + b_{2,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{2,1,0} \right]_{M_L, M_S=0, M_T=0}^{L,S=0,T=0} \right\}_{L=1,3, M_L=-L \rightarrow L}$
$U_{ST}(6)$	$\left\{ \left[ b_{0,s_1,t_1}^+ \otimes \tilde{b}_{0,s_2,t_2} + \sqrt{5} b_{2,s_1,t_1}^+ \otimes \tilde{b}_{2,s_2,t_2} \right]_{M_L=0, M_S, M_T}^{L=0,S,T} \right\}_{s_1, t_1, s_2, t_2, S, M_S, T, M_T}$
$SU_S(3)$	$\left\{ Q_\mu^s = \left[ b_{0,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{0,1,0} + \sqrt{5} b_{2,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{2,1,0} \right]_{M_L=0, M_S=\mu, M_T=0}^{L=0,S=2,T=0} \right\}_{\mu=-2 \rightarrow 2}, \left\{ S_\mu \right\}_{\mu=-1 \rightarrow 1}$
$SU_T(3)$	$\left\{ Q_\mu^t = \left[ b_{0,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{0,0,1} + \sqrt{5} b_{2,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{2,0,1} \right]_{M_L=0, M_S=0, M_T=\mu}^{L=0,S=0,T=2} \right\}_{\mu=-2 \rightarrow 2}, \left\{ T_\mu \right\}_{\mu=-1 \rightarrow 1}$
$SO_{ST}(6)$ $\approx SU_{ST}(4)$	$\left\{ T_\mu \right\}_{\mu=-1 \rightarrow 1}, \left\{ S_\mu \right\}_{\mu=-1 \rightarrow 1}, \left\{ (Y_\pm)_{\mu, \nu} \right\}_{\substack{\mu=-1 \rightarrow 1 \\ \nu=-1 \rightarrow 1}}$
$SO_L(3)$	$\left\{ L_\mu \right\}_{\mu=-1 \rightarrow 1}$
$SO_S(3)$	$\left\{ S_\mu \right\}_{\mu=-1 \rightarrow 1}$

Tableau (3.1) : Générateurs de quelques sous-groupes de  $U(36)$

NB :  $Q_\mu^{l, \chi}$  désigne le moment quadrupolaire orbital dépendant comme en IBM-1 (cf. chapitre 1-IV-2-b) d'un paramètre  $\chi$  et donné par :

$$Q_\mu^{l, \chi} = \left[ b_{0,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{2,0,1} + b_{0,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{2,1,0} + b_{2,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{0,0,1} + b_{2,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{0,1,0} \right]_{M_L=\mu, M_S=0, M_T=0}^{L=2, S=0, T=0} + \dots$$

$$\chi \left[ b_{2,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{2,0,1} + b_{2,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{2,1,0} \right]_{M_L=\mu, M_S=0, M_T=0}^{L=2, S=0, T=0} \quad (3.9)$$

Enfin  $(Y_\pm)_{\mu, \nu}$  désigne l'expression IBM-4 de l'opérateur type Gamow-Teller :

$$(Y_\pm)_{\mu, \nu} = \left[ b_{0,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{0,1,0} + \sqrt{5} b_{2,0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{2,1,0} \right]_{M_L=0, M_S=\mu, M_T=\nu}^{L=0, S=1, T=1} \pm \dots$$

$$\left[ b_{0,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{0,0,1} + \sqrt{5} b_{2,1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{2,0,1} \right]_{M_L=0, M_S=\mu, M_T=\nu}^{L=0, S=1, T=1} \quad (3.10)$$

(Les 2 signes peuvent en fait être indifféremment choisis)



### ③ Calculs numériques

En dehors des hamiltoniens avec symétrie dynamique qui viennent d'être évoqués, la détermination des niveaux d'énergie en IBM-4 requiert une diagonalisation numérique qui n'avait jamais été effectuée jusqu'à présent. A titre indicatif, les dimensions des sous-espaces  $M_J = 0$  en IBM-4 sont indiquées dans le tableau (3.2) ci-dessous pour différents noyaux  $N = Z$  au-delà du  $^{56}\text{Ni}$  et ce comparativement à celles du modèle en couches dans l'espace de valence  $pf_{5/2}g_{9/2}$  pertinent pour ces mêmes noyaux :

Noyau	Nombre de bosons	Dimension IBM-4	Dimension modèle en couches
$^{58}\text{Cu}$	1	6	62
$^{60}\text{Zn}$	2	64	5858
$^{62}\text{Ga}$	3	528	182184
$^{64}\text{Ge}$	4	3807	4151256
$^{66}\text{As}$	5	23760	43671839
$^{68}\text{Se}$	6	132330	367949274
$^{70}\text{Br}$	7	664726	1648828756

Tableau (3.2) : Taille maximale des matrices à diagonaliser en IBM-4 et dans le modèle en couches pour quelques noyaux exotiques  $N = Z$ .

Afin de pouvoir réaliser des études réalistes en IBM-4, nous avons donc élaboré un code informatique dont l'algorithme est en fait voisin de celui des programmes standard de modèle en couches tel ANTOINE [Cau90] ou OXBASH [Bro84]. Plus précisément, le calcul des états à  $\mathcal{N}$  bosons caractérisés par un moment cinétique total  $J$  et un isospin  $T$  est réalisé dans une base découplée obtenue en répartissant les  $\mathcal{N}$  bosons sur leurs différents états individuels  $|n\rangle = (l_n, s_n, j_n, m_{j_n}, t_n, m_{t_n})$  ( $n = 1 \rightarrow 36$ ) de manière à avoir des projections  $M_J, M_T$  respectivement égales à  $J$  et  $T$ . Un tel choix, effectué pour limiter la dimension, est de toute façon sans conséquences sur la spectroscopie en raison de l'invariance par rotation dans l'espace spin-orbital ainsi que dans celui d'isospin. En résumé, les vecteurs de base considérés s'écrivent donc :

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}_1! \dots \mathcal{N}_n! \dots}} (b_1^+)^{\mathcal{N}_1} \dots (b_n^+)^{\mathcal{N}_n} \dots | \rangle \quad (3.11)$$

où les nombres d'occupation  $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_n, \dots$  sont astreints à vérifier :

$$\sum_n \mathcal{N}_n = \mathcal{N}, \quad M_J = \sum_n m_{j_n} \mathcal{N}_n = J \quad \text{et} \quad M_T = \sum_n m_{t_n} \mathcal{N}_n = T \quad (3.12)$$

Numériquement, chaque ket (3.11) est en fait représenté par un entier  $q = \prod_n (q_n)^{\mathcal{N}_n}$  obtenu suite à la mise en correspondance de tout état individuel  $|n\rangle$  avec un nombre premier  $q_n$ .



La détermination des éléments propres de l'hamiltonien  $H$  est alors menée selon la méthode de Lanczos [Bru77-chapitre 18] qui permet d'extraire quelques niveaux sans avoir à traiter l'intégralité de la matrice. Pour cela, un vecteur initial  $|\Psi_{J,T}^{(0)}\rangle$  du sous-espace  $(J, M_J = J, T, M_T = T)$  est tout d'abord construit par diagonalisation d'une combinaison linéaire arbitraire des observables  $J^2$  et  $T^2$  puis utilisé pour générer une base orthonormée conformément à l'algorithme récurrent ci-dessous :

$$\begin{cases} H |\Psi_{J,T}^{(0)}\rangle = E_0 |\Psi_{J,T}^{(0)}\rangle + \varepsilon_0 |\Psi_{J,T}^{(1)}\rangle \\ H |\Psi_{J,T}^{(k)}\rangle = \varepsilon_{k-1} |\Psi_{J,T}^{(k-1)}\rangle + E_k |\Psi_{J,T}^{(k)}\rangle + \varepsilon_k |\Psi_{J,T}^{(k+1)}\rangle, \quad k \geq 1 \\ E_k = \langle \Psi_{J,T}^{(k)} | H | \Psi_{J,T}^{(k)} \rangle, \quad \varepsilon_k = \| H |\Psi_{J,T}^{(k)}\rangle - \varepsilon_{k-1} |\Psi_{J,T}^{(k-1)}\rangle - E_k |\Psi_{J,T}^{(k)}\rangle \|, \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

La base  $\{|\Psi_{J,T}^{(k)}\rangle\}_k$  ainsi définie présente en réalité un double avantage : d'une part, elle tridiagonalise  $H$  et d'autre part, au fur à mesure que sa dimension augmente, les valeurs propres convergent par ordre croissant vers celles qui seraient obtenues dans l'espace complet. Habituellement, quelques dizaines d'itérations suffisent pour déterminer l'état fondamental.

*Remarque :*

Dans la pratique, les erreurs numériques obligent à réorthogonaliser chaque nouveau vecteur  $|\Psi_{J,T}^{(k)}\rangle$  par rapport aux précédents ainsi qu'à le projeter dans le sous-espace  $(J, T)$  en

$$\text{appliquant l'opérateur } P_{J,T} = \prod_{J'=J+1}^{J_{\text{Max}}} \frac{J^2 - J'(J'+1)}{J(J+1) - J'(J'+1)} \prod_{T'=T+1}^{T_{\text{Max}}} \frac{T^2 - T'(T'+1)}{T(T+1) - T'(T'+1)}.$$

Enfin, précisons que l'utilisation des nombres premiers s'avère particulièrement intéressante pour appliquer les opérateurs  $H, J^2, T^2, \dots$  sur les différents vecteurs découplés  $|q = \prod_n (q_n)^{\mathcal{N}_n}\rangle$ . En considérant par exemple un terme à 1 corps, on a en effet  $b_{n_1}^+ b_{n_2} |q\rangle = 0$  si  $q$  n'est pas divisible par  $q_{n_2}$  et sinon  $b_{n_1}^+ b_{n_2} |q\rangle = \sqrt{\mathcal{N}_{n_2}(\mathcal{N}_{n_1} + \delta_{n_1, n_2})} |q' = q q_{n_1} / q_{n_2}\rangle$  : pour construire la matrice-colonne représentant l'état transformé, il suffit alors de rechercher dans la base le nouveau vecteur  $|q'\rangle$  et de calculer les nombres d'occupation  $\mathcal{N}_{n_1}, \mathcal{N}_{n_2}$  grâce à des divisions successives de  $q$  par  $q_{n_1}$  et  $q_{n_2}$ .

#### ④ Quelques résultats analytiques

Dans ce paragraphe, nous proposons d'appliquer les techniques de la théorie des groupes abordées au chapitre 1 pour illustrer le contenu physique de la limite  $SU_{ST}(4)$  de IBM-4. Cependant, afin d'éviter toute complication liée à la structure orbitale des états, les calculs seront effectués dans une approche restreinte consistant à ne retenir que la composante



spin-isospin du modèle par élimination des bosons  $l=2$ . En conséquence, les bosons à considérer pourront simplement être notés :

$$b_{s,m_s,t,m_t}^+ \text{ avec } (s,t) = (0,1), (1,0) \text{ et } \begin{cases} m_s = -s \rightarrow s \\ m_t = -t \rightarrow t \end{cases} \quad (3.13)$$

La structure algébrique qu'ils définissent se trouve alors considérablement simplifiée au regard du modèle IBM-4 complet puisqu'elle se réduit au réseau de groupes suivant :

$$U_{ST}(6) \supset \begin{cases} SU_s(3) \otimes SU_T(3) \\ SO_{ST}(6) \approx SU_{ST}(4) \end{cases} \supset SO_s(3) \otimes SO_T(3), \quad (3.14)$$

où les générateurs des algèbres mises en jeu sont obtenus à partir du tableau (3.1) par suppression de tous les termes faisant intervenir des bosons  $l=2$ . En outre, seules les représentations symétriques  $[\mathcal{N}]$  de  $U_{ST}(6)$  sont maintenant à considérer et ainsi toutes les réductions mentionnées dans (3.14) deviennent analytiques. Les classifications des états qui en résultent sont précisément données ci-dessous :

➤ Limite  $SU_s(3) \otimes SU_T(3)$

$$\left| \begin{array}{ccccc} U_{ST}(6) & \supset & SU_s(3) & \otimes & SU_T(3) & \supset & SO_s(3) & \otimes & SO_T(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{N}] & & [\mathcal{N}_{1,0}] & & [\mathcal{N}_{0,1}] & & SM_s & & TM_T \end{array} \right\rangle$$

noté plus simplement  $|\mathcal{N}, (\mathcal{N}_{1,0}, \mathcal{N}_{0,1}), SM_s, TM_T\rangle$  (3.15)

Physiquement,  $(\mathcal{N}_{1,0}, \mathcal{N}_{0,1})$  représentent les nombres de bosons isoscalaires et isovectoriels, et leurs valeurs sont donc logiquement données par  $(0, \mathcal{N}), (1, \mathcal{N}-1), \dots, (\mathcal{N}-1, 1), (\mathcal{N}, 0)$ . D'autre part, le spin  $S$  et l'isospin  $T$  se déterminent facilement à partir de la règle de branchement  $SU(3) \supset SO(3)$  précisée dans le tableau (1.82) du chapitre 1 :

$$\begin{cases} S = \mathcal{N}_{1,0}, \mathcal{N}_{1,0} - 2, \dots, 1 \text{ ou } 0 \\ T = \mathcal{N}_{0,1}, \mathcal{N}_{0,1} - 2, \dots, 1 \text{ ou } 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

➤ Limite  $SU_{ST}(4)$

$$\left| \begin{array}{ccccc} U_{ST}(6) & \supset & SU_{ST}(4) & \supset & SO_s(3) & \otimes & SO_T(3) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\mathcal{N}] & & [\lambda\lambda] & & SM_s & & TM_T \end{array} \right\rangle$$

noté dorénavant  $|\mathcal{N}, \lambda, SM_s, TM_T\rangle$  (3.17)

où les valeurs de  $\lambda$  résultent de l'isomorphisme  $SU(4) \approx SO(6)$  ainsi que de la décomposition en  $SO(N)$  des RI symétriques de  $U(N)$  (cf. chapitre 1-IV-3) :

$$\lambda = \mathcal{N}, \mathcal{N}-2, \dots, 1 \text{ ou } 0 \quad (3.18)$$



De plus, les couples  $(S, T)$  autorisés se déduisent des travaux de Wigner [Fee37] :

$$(S, T) = \begin{aligned} &(0, \lambda), (0, \lambda - 2), \dots, (0, 1) \text{ ou } (0, 0) \\ &(1, \lambda - 1), (1, \lambda - 3), \dots, (0, 1) \text{ ou } (1, 1) \\ &\vdots \\ &(\lambda, 0) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Enfin, les états  $SU_{ST}(4)$  peuvent toujours se décomposer sur l'autre base  $SU_s(3) \otimes SU_t(3)$  :

$$|\mathcal{N}, \lambda, SM_S, TM_T\rangle = \sum_{\omega=0}^{\mathcal{N}} \xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T} |\mathcal{N}, (\omega, \mathcal{N} - \omega), SM_S, TM_T\rangle \quad (3.20)$$

Concrètement, les coefficients  $\xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T}$  du développement peuvent s'obtenir en remarquant que l'invariant quadratique  $C_2[SU_{ST}(4)]$  diagonalise les vecteurs (3.20) avec  $\lambda(\lambda + 4)$  pour valeur propre associée conformément aux résultats généraux du chapitre 1 [cf. équation (1.75)]. Par conséquent :

$$\sum_{\omega_2=0}^{\mathcal{N}} V_{\omega_1, \omega_2}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T} \xi_{\omega_2}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T} = \lambda(\lambda + 4) \xi_{\omega_1}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T} \quad (3.21)$$

où  $V_{\omega_1, \omega_2}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T} = \langle \mathcal{N}, (\omega_1, \mathcal{N} - \omega_1), SM_S, TM_T | C_2[SU_{ST}(4)] | \mathcal{N}, (\omega_2, \mathcal{N} - \omega_2), SM_S, TM_T \rangle$ . Le calcul de ces éléments de matrice s'effectue par ailleurs facilement grâce au théorème de Wigner-Eckart et a été reporté en annexe pour une meilleure lisibilité. Nous mentionnons ici simplement les valeurs prises par les éléments non nuls :

$$\begin{cases} V_{\omega, \omega}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T} = 2\omega(\mathcal{N} - \omega) + 3\mathcal{N} + S(S + 1) + T(T + 1) \\ V_{\omega, \omega-2}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T} = \sqrt{(\omega - S)(\omega + S + 1)(\mathcal{N} - \omega - T + 2)(\mathcal{N} - \omega + T + 3)} \\ V_{\omega, \omega+2}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T} = \sqrt{(\omega - S + 2)(\omega + S + 3)(\mathcal{N} - \omega - T)(\mathcal{N} - \omega + T + 1)} \end{cases} \quad (3.22)$$

En général, la détermination des amplitudes  $\xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T}$  du changement de base, par résolution de l'équation aux valeurs propres (3.21), ne peut s'effectuer que numériquement. Néanmoins, pour l'état fondamental  $SU_{ST}(4)$  des noyaux  $N = Z$ , une évaluation littérale s'avère réalisable et conduit aux résultats du tableau (3.3). Les expressions obtenues trouvent en réalité leur intérêt dans l'opportunité qu'elles offrent pour caractériser physiquement la symétrie spin-isospin de Wigner en IBM-4. En particulier, la connaissance des coefficients  $\xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T}$  permet d'obtenir la structure en paires des états  $SU_{ST}(4)$  par l'intermédiaire des nombres moyens  $\langle \mathcal{N}_{1,0} \rangle$ ,  $\langle \mathcal{N}_{0,1} \rangle$  de bosons ( $s = 1, t = 0$ ) et ( $s = 0, t = 1$ ). En utilisant la conservation de  $(\mathcal{N}_{1,0}, \mathcal{N}_{0,1})$  dans la base  $SU_s(3) \otimes SU_t(3)$ , ces nombres s'expriment en effet par :

$$\langle \mathcal{N}_{10} \rangle = \sum_{\omega} (\xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T})^2 \omega \text{ et } \langle \mathcal{N}_{01} \rangle = \mathcal{N} - \langle \mathcal{N}_{10} \rangle \quad (3.23)$$

Leurs valeurs précises dans les cas les plus intéressants ont été rassemblées dans le tableau (3.4).



Type de noyau $N = Z$	Nombres quantiques de l'état $SU_{ST}(4)$ fondamental	Expression littérale des coefficients de changement de base $\xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda, S, T}$
pair pair	$\lambda = 0$ $(S, T) = (0, 0)$	$(-1)^{(\mathcal{N}-\omega)/2} \sqrt{\frac{8 (\omega+1)!! (\mathcal{N}-\omega+1)!!}{(\mathcal{N}+2) (\mathcal{N}+4) \omega!! (\mathcal{N}-\omega)!!}}$ $\omega$ pair
impair impair	$\lambda = 1$ $(S, T) = (1, 0)$	$(-1)^{(\mathcal{N}-\omega)/2} \sqrt{\frac{16 (\omega+2)!! (\mathcal{N}-\omega+1)!!}{(\mathcal{N}+1) (\mathcal{N}+3) (\mathcal{N}+5) (\omega-1)!! (\mathcal{N}-\omega)!!}}$ $\omega$ impair
	$\lambda = 1$ $(S, T) = (0, 1)$	$(-1)^{\omega/2} \sqrt{\frac{16 (\omega+1)!! (\mathcal{N}-\omega+2)!!}{(\mathcal{N}+1) (\mathcal{N}+3) (\mathcal{N}+5) \omega!! (\mathcal{N}-\omega-1)!!}}$ $\omega$ pair

Tableau (3.3) : Passage  $SU_S(3) \otimes SU_T(3) \rightarrow SU_{ST}(4)$  en IBM-4( $l=0$ )

Type de noyau $N = Z$	Nombres quantiques de l'état $SU_{ST}(4)$ fondamental	Nombre moyen de bosons isoscalaires $\langle \mathcal{N}_{10} \rangle$	Nombre moyen de bosons isovectoriels $\langle \mathcal{N}_{01} \rangle$
pair pair	$\lambda = 0$ $(S, T) = (0, 0)$	$\mathcal{N}/2$	$\mathcal{N}/2$
impair impair	$\lambda = 1$ $(S, T) = (1, 0)$	$(5\mathcal{N}+3)/8$	$(3\mathcal{N}-3)/8$
	$\lambda = 1$ $(S, T) = (0, 1)$	$(3\mathcal{N}-3)/8$	$(5\mathcal{N}+3)/8$

Tableau (3.4) : Structure en paires des noyaux  $N = Z$  à la limite  $SU_{ST}(4)$  en IBM-4( $l=0$ )



D'autre part, il est également possible, toujours pour le niveau fondamental des noyaux  $N = Z$  à la limite  $SU_{ST}(4)$ , de donner la forme explicite des vecteurs d'état en termes des bosons  $b_{s,m_s,t,m_t}^+$ . En effet, une telle réalisation est connue à la limite  $SU_S(3) \otimes SU_T(3)$  [Mos69] :

$$|\mathcal{N}, (\omega, \mathcal{N} - \omega), SM_S, TM_T\rangle = B_{\omega,S} B_{\mathcal{N}-\omega,T} (b_{1,0}^+ \cdot b_{1,0}^+)^{(\omega-S)/2} \gamma_{S,M_S}(b_{1,0}^+) (b_{0,1}^+ \cdot b_{0,1}^+)^{(\mathcal{N}-\omega-T)/2} \gamma_{T,M_T}(b_{0,1}^+) | \rangle \quad (3.24)$$

où :

➤  $B_{n,L} = (-1)^{(n-L)/2} \sqrt{\frac{4\pi}{(n-L)!! (n+L+1)!!}}$  est un facteur de normalisation

➤ la notation  $\cdot$  implique un produit scalaire en spin et isospin des opérateurs tensoriels :

$$b_{s,t}^+ \cdot b_{s',t'}^+ = \sum_{m_s, m_t} (-1)^{s-m_s+t-m_t} b_{s,m_s,t,m_t}^+ b_{s,-m_s,t,-m_t}^+.$$

➤  $\gamma_{L,M}$  une harmonique sphérique solide définie par  $\gamma_{L,M}(\vec{r}) = r^L Y_{L,M}(\theta, \varphi)$  et qui s'exprime en fonction des 3 composantes standard  $r_\mu$  ( $\mu = -1, 0, 1$ ) du vecteur position  $\vec{r}$ . La notation  $\gamma_{S,M_S}(b_{1,0}^+)$  correspond alors à l'opérateur obtenu à partir de  $\gamma_{S,M_S}(\vec{r})$  en effectuant les substitutions  $r_\mu \leftrightarrow b_{1,\mu,0,0}^+$ . Une discussion similaire s'applique évidemment à  $\gamma_{T,M_T}(b_{0,1}^+)$ .

A partir du développement (3.24) et des coefficients de changement de base  $\xi_{\omega}^{\mathcal{N},\lambda,S,T}$  présentés auparavant, les kets  $SU_{ST}(4)$  apparaissent ainsi comme des sommations sur  $\omega$  qui se simplifient grâce à la formule du binôme pour aboutir finalement aux formes données dans le tableau (3.5) ci-dessous.

Type de noyau $N = Z$	Nombres quantiques de l'état $SU_{ST}(4)$ fondamental	Réalisation en termes des bosons $b_{s,m_s,t,m_t}^+$
pair pair	$\lambda = 0$ $(S, T) = (0, 0)$	$\sqrt{\frac{8}{\mathcal{N}!! (\mathcal{N} + 4)!!}} (b_{0,1}^+ \cdot b_{0,1}^+ - b_{1,0}^+ \cdot b_{1,0}^+)^{\mathcal{N}/2}   \rangle$
impair impair	$\lambda = 1$ $(S, T) = (1, 0)$	$\sqrt{\frac{48}{(\mathcal{N} - 1)!! (\mathcal{N} + 5)!!}} b_{1,M_S,0,0}^+ (b_{0,1}^+ \cdot b_{0,1}^+ - b_{1,0}^+ \cdot b_{1,0}^+)^{(\mathcal{N}-1)/2}   \rangle$
	$\lambda = 1$ $(S, T) = (0, 1)$	$\sqrt{\frac{48}{(\mathcal{N} - 1)!! (\mathcal{N} + 5)!!}} b_{0,0,1,M_T}^+ (b_{0,1}^+ \cdot b_{0,1}^+ - b_{1,0}^+ \cdot b_{1,0}^+)^{(\mathcal{N}-1)/2}   \rangle$

Tableau (3.5) : Expression de quelques états  $SU_{ST}(4)$  dans l'espace IBM-4 ( $l=0$ )



Il apparaît ainsi que dans le cadre de la symétrie dynamique  $SU_{ST}(4)$  de l'approche IBM-4 simplifiée que nous étudions, l'état fondamental des noyaux  $N = Z$  se caractérise par un condensat de bosons appariés. Si l'on associe alors le spin des bosons à celui de 2 fermions corrélés, la limite  $SU_{ST}(4)$  du modèle en couches dans le canal  $L = 0$  implique donc la présence d'un agglomérat de particules  $\alpha$  constituées d'une superposition équiprobable de 2 paires  $(S, T) = (0, 1)$  et de 2 paires  $(S, T) = (1, 0)$  toujours couplées à  $S = 0$  et  $T = 0$ .

*Remarque :*

Il est important de rappeler que les considérations de paragraphe ne sont valables qu'en l'absence d'une structure orbitale des bosons. En conséquence, les RI énergétiquement favorisées de  $SU_{ST}(4)$  appartiennent toutes aux sous-espaces symétriques de  $U_{ST}(6)$ . Dans le modèle IBM-4 complet, il n'en est plus nécessairement ainsi : par exemple, pour 3 bosons, le schéma de Young  $SU_{ST}(4)$  associé au niveau fondamental d'un système  $N = Z$  se situe à la fois dans les RI [3] et [21] de  $U_{ST}(6)$ . L'intervention de ces représentations non symétriques est alors susceptible de modifier les résultats obtenus bien qu'à ce jour, aucune évaluation quantitative n'ait été effectuée en raison de la complexité des calculs à mettre en jeu.

---

## II – Schémas généraux de construction microscopique

---

### ① Introduction

De façon générale, la détermination de l'hamiltonien des modèles IBM est un problème délicat. A priori, l'existence de limites algébriques pourrait pourtant permettre d'envisager des perspectives simples. En effet, dans ce cas nous avons vu que les niveaux d'énergie dépendent linéairement des coefficients de chacun des opérateurs de Casimir associés aux différents groupes mis en jeu dans la chaîne de réduction. Par ajustement sur les spectres expérimentaux, il semble alors aisé de déterminer ces coefficients. Néanmoins, le dénombrement et le choix des symétries les plus pertinentes peuvent s'avérer complexes et d'autre part il demeure un arbitraire dans l'affectation des nombres quantiques décrivant l'état associé à chaque niveau. Ces difficultés prennent en fait d'autant plus d'importance que la structure algébrique du modèle en bosons est riche et que la densité de niveaux des noyaux étudiés est grande, ce qui est précisément le cas de l'approche IBM-4 et des noyaux impair-impair  $N = Z$  auxquels elle est principalement destinée.

Toujours dans l'optique d'une étude phénoménologique, divers hamiltoniens schématiques mais s'écartant des symétries dynamiques ont été également proposés : on peut par exemple citer en IBM-1 l'hamiltonien Q-consistant [War83] ou en IBM-2 la paramétrisation de Talmi [Ots78a] qui a d'ailleurs été récemment généralisée pour IBM-3



[Sug97]. Dans tous ces cas, la forme choisie ne dépend que de quelques paramètres déterminés via l'emploi d'une procédure itérative de moindres carrés afin de minimiser l'écart avec les données. L'avantage d'une telle démarche est en réalité double : d'une part, on aboutit ainsi à une description simple, réaliste et unifiée d'une grande variété de structures nucléaires et d'autre part, si les paramètres ont une dépendance régulière en fonction des nombres de bosons (comme c'est le cas en IBM-2), il est possible par extrapolation d'accéder à des spectroscopies non connues expérimentalement.

Pour des modèles complexes, comme IBM-4, il est cependant difficile de suggérer la forme des interactions en bosons qui jouent un rôle essentiel dans l'interprétation des niveaux collectifs de basse énergie. Déjà en IBM-2, la nature de l'hamiltonien phénoménologique utilisé par la suite avec succès, trouve en réalité son origine dans une étude microscopique aboutissant à la traduction en bosons des interactions quadrupolaires et d'appariement [Ots78a, Ots78b]. Finalement, la recherche d'une réalisation bosonique du modèle en couches se révèle donc non seulement intéressante sur le plan conceptuel pour appréhender les fondements des approches IBM mais aussi fort utile dans la paramétrisation de leurs hamiltoniens.

Dans ce contexte, une quantité de techniques générales, initiées par des travaux en physique du solide sur les ondes de spin, ont été proposées pour simuler dans un espace de bosons les propriétés d'un système de fermions en interaction. Elles se distinguent en fait par la nature mathématique (opérateurs ou vecteurs) des objets mis en correspondance dans les 2 espaces et vont faire l'objet d'une discussion détaillée dans les paragraphes suivants.

#### ① Méthodes d'expansion des observables (Belyev - Zelevinskii [Bel62])

Ces approches sont basées sur la volonté de reproduire dans l'espace des bosons l'algèbre des opérateurs bi-fermioniques  $a_{n_1}^+ a_{n_2}^+$ ,  $a_{n_1} a_{n_2}$ ,  $a_{n_1}^+ a_{n_2}$  ( $n_1, n_2 = 1 \rightarrow N$ ) qui sont susceptibles d'engendrer toute la dynamique d'un système composé d'un nombre pair de particules :

$$[a_{n_1}^+ a_{n_2}^+ , a_{n_3}^+ a_{n_4}^+] = [a_{n_1} a_{n_2} , a_{n_3} a_{n_4}] = 0 \quad (3.25.a)$$

$$[a_{n_1} a_{n_2} , a_{n_3}^+ a_{n_4}^+] = \delta_{n_1, n_4} \delta_{n_2, n_3} + \delta_{n_1, n_3} a_{n_4}^+ a_{n_2} + \delta_{n_2, n_4} a_{n_3}^+ a_{n_1} - (n_1 \leftrightarrow n_2) \quad (3.25.b)$$

$$[a_{n_1} a_{n_2} , a_{n_3}^+ a_{n_4}] = \delta_{n_2, n_3} a_{n_1} a_{n_4} - (n_1 \leftrightarrow n_2) \quad (3.25.c)$$

$$[a_{n_1}^+ a_{n_2} , a_{n_3}^+ a_{n_4}] = \delta_{n_2, n_3} a_{n_1}^+ a_{n_4} - \delta_{n_1, n_4} a_{n_3}^+ a_{n_2} \quad (3.25.d)$$

Afin de réaliser un tel programme, on idéalise chaque paire de fermions  $a_{n_1}^+ a_{n_2}^+$  à un boson  $b_{n_1, n_2}^+$  dont l'adjoint  $b_{n_1, n_2}$  est alors naturellement relié au système de 2 trous  $(a_{n_1}^+ a_{n_2}^+)^+ = a_{n_2} a_{n_1}$ .



En raison des relations d'anticommutation que vérifient les opérateurs de création et de destruction d'un fermion, ces bosons doublement labellés sont naturellement supposés antisymétriques dans l'échange de leurs indices, soit précisément :

$$b_{n_2, n_1}^+ = -b_{n_1, n_2}^+ ; b_{n_2, n_1} = -b_{n_1, n_2} \quad (3.26)$$

Ils sont enfin, astreints à absorber toutes les parties des relations de commutation précédentes (3.25.a-d) compatibles avec leur statistique, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} [b_{n_1, n_2}^+, b_{n_3, n_4}^+] = [b_{n_1, n_2}, b_{n_3, n_4}] = 0 \\ [b_{n_1, n_2}, b_{n_3, n_4}^+] = \delta_{n_1, n_3} \delta_{n_2, n_4} - \delta_{n_1, n_4} \delta_{n_2, n_3} \end{cases} \quad (3.27)$$

Dès lors, afin de prendre en compte les termes résiduels, l'image de chacun des opérateurs élémentaires  $A = (a_{n_1}^+ a_{n_2}^+, a_{n_1} a_{n_2}, a_{n_1}^+ a_{n_2})$  est recherchée sous la forme d'un développement en produits des bosons idéaux  $b_{n_1, n_2}^+, b_{n_1, n_2}$  :

$$A_B = \sum_k A_B^{(k)} \text{ avec } A_B^{(k)} \propto \underbrace{b^+ b^+ \dots b^+ b b \dots b}_{k \text{ facteurs}} \quad (3.28)$$

Les coefficients de ces développements sont par ailleurs déterminés de manière à ce que n'importe quelle relation de commutation  $[A, B] = C$  soit vérifiée dans l'espace des bosons à chaque ordre de l'expansion [Mar74] :

$$[A_B^{(1)}, B_B^{(1)}] = C_B^{(0)}, [A_B^{(1)}, B_B^{(2)}] + [A_B^{(2)}, B_B^{(1)}] = C_B^{(1)}, \dots, \sum_{q=1}^{k-1} [A_B^{(q)}, B_B^{(k-q)}] = C_B^{(k-2)}, \dots \quad (3.29)$$

Deux solutions à ce problème perturbatif ont en fait été principalement employées : l'une connue sous le nom de série d'Holstein-Primakoff s'impose de préserver l'hermiticité et se trouve ainsi conduite à encoder le principe de Pauli dans l'introduction de termes à N-corps alors que l'autre élaborée par Dyson s'autorise à être non-hermitique pour incorporer toutes les corrections fermioniques dans un développement fini. Plus précisément, ces 2 schémas de bosonisation sont donnés par les expressions ci-dessous :

#### ■ Expansion d'Holstein-Primakoff [Hol40, Jan71]

$$\begin{aligned} (a_{n_1}^+ a_{n_2}^+)_B &= \left[ b^+ \sqrt{1 - (b^+ b)^T} \right]_{n_2, n_1} = b_{n_1, n_2}^+ - \frac{1}{2} \sum_{n_3, n_4} b_{n_1, n_3}^+ b_{n_2, n_4}^+ b_{n_3, n_4} + \dots \\ (a_{n_1} a_{n_2})_B &= (a_{n_2}^+ a_{n_1}^+)_B^+ = \left[ \sqrt{1 - (b^+ b)^T} b \right]_{n_2, n_1} = b_{n_2, n_1} - \frac{1}{2} \sum_{n_3, n_4} b_{n_3, n_4}^+ b_{n_2, n_3} b_{n_1, n_4} + \dots \\ (a_{n_1}^+ a_{n_2})_B &= (b^+ b)_{n_1 n_2} = \sum_{n_3} b_{n_1 n_3}^+ b_{n_2 n_3} \end{aligned} \quad (3.30)$$



■ Expansion de Dyson [Dys56, Jan71]

$$\begin{aligned} (a_{n_1}^+ a_{n_2}^+)_B &= \left[ b^+ (I - (b^+ b)^T) \right]_{n_2, n_1} = b_{n_1, n_2}^+ - \sum_{n_3, n_4} b_{n_1, n_3}^+ b_{n_2, n_4}^+ b_{n_3, n_4} \\ (a_{n_1} a_{n_2})_B &= b_{n_2, n_1} \\ (a_{n_1}^+ a_{n_2})_B &= (b^+ b)_{n_1, n_2} = \sum_{n_3} b_{n_1, n_3}^+ b_{n_2, n_3} \end{aligned} \quad (3.31)$$

où  $b^+$ ,  $b$  désignent les matrices respectivement définies par  $(b^+)_{n_1, n_2} = b_{n_2, n_1}^+$  et  $(b)_{n_1, n_2} = b_{n_1, n_2}$

Sous les formes (3.30) et (3.31), les développements en bosons des opérateurs fermioniques sont en réalité peu pratiques. Habituellement, on les exprime plutôt en faisant appel à des paires collectives de fermions  $A_\omega^+$  définies par leurs composantes  $X_{n_1, n_2}^\omega$  sur une base à 2 particules indépendantes  $\{a_{n_1}^+ a_{n_2}^+ | \rangle\}_{n_1 < n_2}$  :

$$A_\omega^+ = \sum_{n_1 < n_2} X_{n_1, n_2}^\omega a_{n_1}^+ a_{n_2}^+ = \sum_{n_1, n_2} Y_{n_1, n_2}^\omega a_{n_1}^+ a_{n_2}^+ \text{ avec } Y_{n_1, n_2}^\omega = \begin{cases} X_{n_1, n_2}^\omega / 2 & \text{si } n_1 < n_2 \\ 0 & \text{si } n_1 = n_2 \\ -X_{n_1, n_2}^\omega / 2 & \text{si } n_1 > n_2 \end{cases} \quad (3.32)$$

Les états  $|\omega\rangle = A_\omega^+ | \rangle$  sont en outre supposés former une famille orthonormée complète si bien que :

$$\sum_{n_1, n_2} (Y_{n_1, n_2}^{\omega_1})^* Y_{n_1, n_2}^{\omega_2} = \frac{1}{2} \delta_{\omega_1, \omega_2} \quad (3.33.a)$$

$$\text{et } \sum_{\omega} Y_{n_1, n_2}^\omega (Y_{n_3, n_4}^\omega)^* = \frac{1}{4} (\delta_{n_1, n_3} \delta_{n_2, n_4} - \delta_{n_1, n_4} \delta_{n_2, n_3}) \quad (3.33.b)$$

En parfaite analogie, il est alors logique d'introduire des bosons collectifs :

$$b_\omega^+ = \sum_{n_1, n_2} Y_{n_1, n_2}^\omega b_{n_1, n_2}^+, \text{ soit } b_{n_1, n_2}^+ = 2 \sum_{\omega} (Y_{n_1, n_2}^\omega)^* b_\omega^+, \quad (3.34)$$

l'algèbre de commutation  $[b_{\omega_1}, b_{\omega_2}^+] = \delta_{\omega_1, \omega_2}$  étant garantie par la relation d'orthogonalité (3.33.a). Dans ce contexte, tout hamiltonien en fermions comportant des contributions à 2 corps au maximum, soit :

$$H = \sum_{n_1, n_2} H_{n_1, n_2}^{(1)} a_{n_1}^+ a_{n_2} + \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} a_{n_1}^+ a_{n_2}^+ a_{n_3} a_{n_4} \quad (3.35)$$

admet donc en terme des bosons  $\{b_\omega^+\}_\omega$  plusieurs images  $H_B$  données génériquement par :

$$H_B = \sum_{\omega_1, \omega_2} [H_B^{(1)}]_{\omega_1, \omega_2} b_{\omega_1}^+ b_{\omega_2} + \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} [H_B^{(2)}]_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} b_{\omega_1}^+ b_{\omega_2}^+ b_{\omega_3} b_{\omega_4} + \dots \quad (3.36)$$



avec :

➤ dans le cas du développement de Holstein-Primakoff :

$$\begin{aligned}
 [H_B^{(1)}]_{\omega_1, \omega_2} &= 4 \sum_{n_1, n_2, n_3} H_{n_1, n_2}^{(1)} (Y_{n_1, n_3}^{\omega_1})^* Y_{n_2, n_3}^{\omega_2} - 4 \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_2}^{\omega_1})^* Y_{n_3, n_4}^{\omega_2} \\
 [H_B^{(2)}]_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} &= 4 \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_4, n_5, n_6}} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_5}^{\omega_1})^* (Y_{n_2, n_6}^{\omega_2})^* Y_{n_3, n_5}^{\omega_3} Y_{n_4, n_6}^{\omega_4} - \dots \\
 &\quad 4 \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_4, n_5, n_6}} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_2}^{\omega_1})^* (Y_{n_5, n_6}^{\omega_2})^* Y_{n_4, n_5}^{\omega_3} Y_{n_3, n_6}^{\omega_4} + \dots \\
 &\quad 2 \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_4, n_5, n_6}} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_5}^{\omega_1})^* (Y_{n_2, n_6}^{\omega_2})^* Y_{n_4, n_5}^{\omega_3} Y_{n_3, n_6}^{\omega_4} - \dots \\
 &\quad 2 \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_4, n_5, n_6}} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_5}^{\omega_1})^* (Y_{n_2, n_6}^{\omega_2})^* Y_{n_4, n_6}^{\omega_3} Y_{n_3, n_5}^{\omega_4} - \dots \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

$\Rightarrow H_B$  est hermitique mais infini

➤ pour le développement de Dyson :

$$\begin{aligned}
 [H_B^{(1)}]_{\omega_1, \omega_2} &= 4 \sum_{n_1, n_2, n_3} H_{n_1, n_2}^{(1)} (Y_{n_1, n_3}^{\omega_1})^* Y_{n_2, n_3}^{\omega_2} - 4 \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_2}^{\omega_1})^* Y_{n_3, n_4}^{\omega_2} \\
 [H_B^{(2)}]_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} &= -16 \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_4, n_5, n_6}} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_5}^{\omega_1})^* (Y_{n_2, n_6}^{\omega_2})^* Y_{n_3, n_5}^{\omega_3} Y_{n_4, n_6}^{\omega_4} \\
 H_B^{(k \geq 3)} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

$\Rightarrow H_B$  se limite à des termes à 2 corps, mais s'avère en général non-hermitique

Signalons cependant qu'il est possible de trouver une expression  $H_B$  à la fois finie et hermitique en réécrivant les interactions  $a_{n_1}^+ a_{n_2}^+ a_{n_3} a_{n_4}$  sous la forme  $\delta_{n_2, n_3} a_{n_1}^+ a_{n_4} - a_{n_1}^+ a_{n_3} a_{n_2}^+ a_{n_4}$ .

Par utilisation de la seule expansion  $(a^+ a)_B$ , il vient en effet :

$$\begin{aligned}
 [H_B^{(1)}]_{\omega_1, \omega_2} &= 4 \sum_{n_1, n_2, n_3} H_{n_1, n_2}^{(1)} (Y_{n_1, n_3}^{\omega_1})^* Y_{n_2, n_3}^{\omega_2} - 4 \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_2}^{\omega_1})^* Y_{n_3, n_4}^{\omega_2} \\
 [H_B^{(2)}]_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} &= -8 \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_4, n_5, n_6}} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_5}^{\omega_1})^* (Y_{n_3, n_6}^{\omega_2})^* Y_{n_2, n_5}^{\omega_3} Y_{n_4, n_6}^{\omega_4} \\
 H_B^{(k \geq 3)} &= 0
 \end{aligned} \tag{3.39}$$



Quelle que soit l'option retenue, l'hamiltonien en bosons  $H_B$  fait de toute façon intervenir l'ensemble des degrés de liberté  $\omega$  de l'espace à 2 fermions. D'autre part, la structure algébrique de cet espace ayant été préservée dans la transcription en bosons, le spectre de  $H_B$  pour un système de  $\mathcal{N}$  bosons contient les mêmes niveaux d'énergie  $E$  que celui de  $H$  pour  $2\mathcal{N}$  fermions. Plus précisément, si  $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$  avec :

$$|\Psi\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{2\mathcal{N}}} x_{n_1, n_2, \dots, n_{2\mathcal{N}}} a_{n_1}^+ a_{n_2}^+ a_{n_3}^+ a_{n_4}^+ \dots a_{n_{2\mathcal{N}-1}}^+ a_{n_{2\mathcal{N}}}^+ | \rangle, \quad (3.40)$$

on a  $H_B |\Psi_B\rangle = E |\Psi_B\rangle$  où  $|\Psi_B\rangle$  est simplement obtenu en bosonisant les déterminants de Slater, c'est-à-dire :

$$|\Psi_B\rangle = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_{2\mathcal{N}}} x_{n_1, n_2, \dots, n_{2\mathcal{N}}} (a_{n_1}^+ a_{n_2}^+)_B (a_{n_3}^+ a_{n_4}^+)_B \dots (a_{n_{2\mathcal{N}-1}}^+ a_{n_{2\mathcal{N}}}^+)_B | \rangle_B \quad (3.41)$$

Néanmoins, la statistique des bosons autorise également l'émergence d'autres états propres qualifiés de spurieux et qui n'ont pas d'équivalent dans l'espace des fermions. Les 3 hamiltoniens (3.37), (3.38) et (3.39) se distinguent alors par la localisation en énergie de ces états dont la mise en évidence constitue donc une étape indispensable dans l'utilisation des techniques d'expansions en bosons. Pour effectuer une telle identification, il a en particulier été proposé par Park [Par87] d'utiliser un opérateur  $S$  défini comme la différence entre les images en bosons (3.38) et (3.39) de l'observable  $\hat{\mathcal{N}}^2$ .

Dans la pratique, la diagonalisation de l'hamiltonien  $H_B$  dans la totalité de l'espace de Fock des bosons n'est pas plus aisée à résoudre que le problème fermionique original. Au contraire, le nombre de vecteurs de base à considérer est encore plus élevé que la dans la description en fermions et l'élaboration de schémas de troncation s'avère donc indispensable. A ce propos, une attention particulière mérite d'être accordée au cas où les paires collectives  $\{A_{\omega}^+\}_{\omega}$  auxquelles on se restreint, forment une sous-algèbre fermée, soit :

$$\left[ [A_{\omega_1}^+, A_{\omega_2}^+], A_{\omega_3}^+ \right] = \sum_{\omega_4} \Gamma_{\omega_1, \omega_2, \omega_3}^{\omega_4} A_{\omega_4}^+ \quad (3.42)$$

A ce moment-là, si l'hamiltonien  $H$  est uniquement fonction des  $A_{\omega}^+$  et  $A_{\omega}$ , il en effet possible de reproduire exactement chaque niveau d'énergie du sous-espace collectif grâce à une image  $H_B$  obtenue en utilisant de l'expansion de Dyson suivie d'un processus d'élimination de tous les termes faisant intervenir des bosons autres que les  $b_{\omega}^+$  (théorème de skéléonisation [Kim88]). Comme précédemment, la diagonalisation de  $H_B$  peut cependant générer des états supplémentaires, mais qui seront totalement découplés des niveaux physiques. Une procédure générale connue sous le nom de  $\mathcal{R}$ -projection a par ailleurs été élaborée par Dobaczewski & al [Dob91] pour identifier dans ces états collectifs spurieux.

En dehors des dynamiques qui découplent un sous-espace collectif engendré par des paires algébriquement fermées, plus rien ne garantit la congruence entre les niveaux d'énergie de l'espace fermionique et ceux issus d'une image en boson skéléonisée de l'hamiltonien. De façon générale, la dégradation de la description en bosons correspond en fait à l'apparition de couplages entre niveaux physiques et états spurieux. Dans le cas du développement non-hermitique de Dyson, cette contamination se traduit d'ailleurs souvent (mais pas



nécessairement) par des valeurs propres présentant une partie imaginaire. A ce sujet, un exemple particulièrement illustratif des effets de troncation dans la bosonisation de Dyson d'un hamiltonien réunissant des contributions quadrupolaires et d'appariement pourra être trouvé dans la référence [Vin89].

Finalement, l'utilisation dans des calculs en bosons réalistes des développements (3.37), (3.38) ou (3.39) avec une simple exclusion des degrés de liberté bi-fermioniques les moins pertinents, est à priori hasardeuse même si elle semble pourtant logique. D'une part, le comportement sous troncation n'a été à notre connaissance étudié que pour la série de Dyson, ce qui justifie certainement de l'utiliser préférentiellement. Cependant, il paraît difficile d'employer la skélétonisation de cette expansion pour des hamiltoniens autres que ceux vérifiant au moins approximativement le critère de découplage du sous-espace collectif retenu pour la description en bosons. Enfin, le caractère en général non-hermitique de l'hamiltonien en bosons obtenu par le développement de Dyson pose conceptuellement un problème au regard du succès des modèles IBM qui préservent au contraire l'hermiticité. Des interactions fermioniques particulières, conduisant à un hamiltonien de Dyson transformable en un hamiltonien hermitique par un opérateur de similitude, ont néanmoins été isolées par Ginocchio et Johnson mais de nouveau pour un découplage parfait des degrés de liberté bosonisés [Gin95]. Dans les autres cas, la restauration de l'hermiticité n'est pas systématique et risque d'augmenter les mélanges entre états physiques et spurieux puisqu'elle fait alors perdre une partie de la transcription en bosons du principe de Pauli. Différentes procédures sont toutefois envisageables pour construire un hamiltonien hermitique  $H_{B,H}$  à partir de celui non-hermitique de Dyson  $H_{B,NH}$ . Dans une base orthonormée à  $\mathcal{N}$  bosons  $\{|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle\}$ , on peut par exemple définir les éléments de matrice de  $H_{B,H}$  grâce à l'une des relations suivantes :

$$\langle \alpha_1^{(\mathcal{N})} | H_{B,H} | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle \alpha_1^{(\mathcal{N})} | H_{B,NH} | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle + \langle \alpha_1^{(\mathcal{N})} | H_{B,NH}^+ | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle \right) \quad (3.43.a)$$

$$\langle \alpha_1^{(\mathcal{N})} | H_{B,H} | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle = \langle \alpha_1^{(\mathcal{N})} | H_{B,NH} | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle \sqrt{\frac{\langle \alpha_1^{(\mathcal{N})} | H_{B,NH}^+ | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle}{\langle \alpha_1^{(\mathcal{N})} | H_{B,NH} | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle}} \quad (3.43.b)$$

Cette dernière égalité a initialement été proposée par Takada [Tak86, Tak88] et récemment une étude approfondie a en fait pu mettre en évidence que sa validité diminue avec la non-orthogonalité des états à plusieurs paires qui correspondent aux vecteurs  $|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle$  de la base choisie dans l'espace des bosons [Kaj98]. Tant qu'à l'autre formule d'hermitisation (3.43.a), aucune étude générale ne semble avoir été menée à ce jour pour estimer la détérioration de la spectroscopie qui résulte de son utilisation. Pour conclure, précisons tout de même que théoriquement les expansions en bosons pourraient être appliquées à des situations beaucoup plus réalistes que celles décrites ici mais à condition de faire appel à des techniques de renormalisation pour construire une interaction effective dans l'espace des bosons capable de compenser les effets de la troncation. Même si des progrès dans cette direction ont été effectués [Kuc89, Nav93], il faut bien prendre conscience que la complexité des calculs à mettre en œuvre rend alors pratiquement la résolution du problème en bosons aussi difficile qu'au niveau fermionique.



### ③ Algorithmes de bosonisation par connexion des états (Marumori [Mar64])

Au contraire du paragraphe précédent, les méthodes que nous allons maintenant discuter se focalisent sur la construction explicite des états de bosons en termes de paires de fermions. Concrètement, il s'agit de mettre en correspondance chacun des vecteurs  $|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_B$  d'une base orthonormée à  $\mathcal{N}$  bosons avec son équivalent fermionique  $|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_F$ . En général, une telle association ne peut cependant se faire directement en raison de la non-orthogonalité des kets  $|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_F$  induite par les blocages fermioniques. Logiquement, on postule donc plutôt la relation :

$$|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_B \leftrightarrow O |\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_F \quad (3.44)$$

où  $O$  est un opérateur d'orthogonalisation. Une transcription hermitique  $H_B$  de l'hamiltonien  $H$  dans l'espace à  $\mathcal{N}$  bosons peut alors aisément s'obtenir en imposant l'égalité des éléments de matrice entre états associés, soit :

$${}_B \langle \alpha_1^{(\mathcal{N})} | H_B | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle_B = {}_F \langle \alpha_1^{(\mathcal{N})} | O^\dagger H O | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle_F \quad (3.45)$$

A titre d'exemple, si on se limite aux termes à 2 corps, la détermination de  $H_B$  repose donc sur les étapes suivantes :

- définition des états à 1 boson  $|\alpha^{(1)}\rangle_B$  en leur associant dans l'espace à 2 fermions des paires collectives orthonormées  $|\alpha^{(1)}\rangle_F$
- calcul de l'hamiltonien en bosons à 1 corps  $H_B^{(1)}$  via (3.44) :

$${}_B \langle \alpha_1^{(1)} | H_B^{(1)} | \alpha_2^{(1)} \rangle_B = {}_F \langle \alpha_1^{(1)} | H | \alpha_2^{(1)} \rangle_F \quad (3.46)$$

- sélection d'une base orthonormée à 2 bosons  $\{|\alpha^{(2)}\rangle_B\}$  puis construction de son image  $\{|\alpha^{(2)}\rangle_F\}$  dans l'espace des états à 4 fermions.
- choix d'un processus d'orthogonalisation à partir duquel l'interaction à 2 corps entre bosons  $H_B^{(2)}$  pourra être évaluée grâce à l'égalité (3.44) après élimination des contributions à 1 corps :

$${}_B \langle \alpha_1^{(2)} | H_B^{(2)} | \alpha_2^{(2)} \rangle_B = {}_F \langle \alpha_1^{(2)} | O^\dagger H O | \alpha_2^{(2)} \rangle_F - {}_B \langle \alpha_1^{(2)} | H_B^{(1)} | \alpha_2^{(2)} \rangle_B \quad (3.47)$$

Un tel algorithme pourrait évidemment se poursuivre pour évaluer les contributions à 3, 4, ... corps et de façon générale, l'hamiltonien  $H_B$  obtenu est ainsi infini. L'utilisation pratique de la méthode nécessite donc une diminution suffisamment rapide des termes à  $N$ -corps pour pouvoir effectuer une troncation. A ce sujet, une étude approfondie a été menée par Ginocchio [Gin95] et a permis de mettre en évidence que la convergence de  $H_B$  est en réalité gouvernée par la manière dont on orthogonalise les états de paires de fermions  $|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_F$ .



Jusqu'à présent, deux mécanismes ont essentiellement été employés :

➤ Orthogonalisation "démocratique" [Sko90]

Ce procédé repose sur la diagonalisation de la matrice de recouvrement d'éléments  $\langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle_F$ . On définit ainsi un système de vecteurs propres  $\Gamma_k^{(\mathcal{N})} = \{ \langle \alpha^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle \}$  et de valeurs propres associées  $g_k^{(\mathcal{N})}$  tels que :

$$\sum_{\alpha_2^{(\mathcal{N})}} \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle_F \langle \alpha_2^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle = g_k^{(\mathcal{N})} \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle \quad (3.48)$$

(équation aux valeurs propres)

$$\sum_{\alpha^{(\mathcal{N})}} \langle \alpha^{(\mathcal{N})} | \Gamma_{k_1}^{(\mathcal{N})} \rangle^* \langle \alpha^{(\mathcal{N})} | \Gamma_{k_2}^{(\mathcal{N})} \rangle = \delta_{k_1, k_2} \quad (3.49)$$

(orthogonalité)

$$\sum_k \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle \langle \alpha_2^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle^* = \delta_{\alpha_i^{(\mathcal{N})}, \alpha_2^{(\mathcal{N})}} \quad (3.50)$$

(complétude)

Supposons tout d'abord qu'aucune valeur propre  $g_k^{(\mathcal{N})}$  soit nulle : toutes les images fermioniques  $|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_F$  sont alors linéairement indépendantes et peuvent être combinées pour former une suite orthonormée en posant :

$$|X_k^{(\mathcal{N})}\rangle_F = \frac{1}{\sqrt{g_k^{(\mathcal{N})}}} \sum_{\alpha^{(\mathcal{N})}} |\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_F \langle \alpha^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle \quad (3.51)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \langle X_{k_1}^{(\mathcal{N})} | X_{k_2}^{(\mathcal{N})} \rangle_F &= \frac{1}{\sqrt{g_{k_1}^{(\mathcal{N})} g_{k_2}^{(\mathcal{N})}}} \sum_{\alpha_i^{(\mathcal{N})}, \alpha_2^{(\mathcal{N})}} \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | \alpha_2^{(\mathcal{N})} \rangle_F \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | \Gamma_{k_1}^{(\mathcal{N})} \rangle^* \langle \alpha_2^{(\mathcal{N})} | \Gamma_{k_2}^{(\mathcal{N})} \rangle \\ &= \frac{g_{k_2}^{(\mathcal{N})} \delta_{k_1, k_2}}{\sqrt{g_{k_1}^{(\mathcal{N})} g_{k_2}^{(\mathcal{N})}}} = \delta_{k_1, k_2} \end{aligned}$$

De façon similaire, les vecteurs  $|X_k^{(\mathcal{N})}\rangle_B = \sum_{\alpha^{(\mathcal{N})}} |\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_B \langle \alpha^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle$  de l'espace des bosons sont eux aussi orthonormés et il est donc logique d'effectuer la mise en relation  $|X_k^{(\mathcal{N})}\rangle_B \leftrightarrow |X_k^{(\mathcal{N})}\rangle_F$ .

A ce moment-là :

$$|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_B = \sum_k |X_k^{(\mathcal{N})}\rangle_B \langle \alpha^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle^* \leftrightarrow \sum_k |X_k^{(\mathcal{N})}\rangle_F \langle \alpha^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle^* \quad (3.52)$$

soit :

$$O |\alpha_i^{(\mathcal{N})}\rangle_F = \sum_k |\alpha_2^{(\mathcal{N})}\rangle_F \frac{1}{\sqrt{g_k^{(\mathcal{N})}}} \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle^* \langle \alpha_2^{(\mathcal{N})} | \Gamma_k^{(\mathcal{N})} \rangle \quad (3.53)$$



Le cas où des valeurs propres  $g_k^{(\mathcal{N})}$  sont nulles indique en fait que certains des kets  $|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_F$  sont liés et révèle donc ainsi l'existence d'états spurieux dans la base  $\{|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_B\}$ . Leur élimination peut néanmoins se réaliser simplement en supprimant autant de vecteurs  $|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_F$  qu'il y a de valeurs  $g_k^{(\mathcal{N})}$  égales à 0 : habituellement, on choisit ceux qui ont le plus faible recouvrement avec les états propres de basse énergie de l'hamiltonien. En notant  $S$  l'ensemble des labels  $\alpha^{(\mathcal{N})}$  correspondant à ces kets exclus, les éléments de matrice de l'hamiltonien  $H_B$  doivent alors être redéfinis en posant :

$$\begin{cases} \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | H_B | \alpha_j^{(\mathcal{N})} \rangle_B = \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | H_B | \alpha_j^{(\mathcal{N})} \rangle_B = 0, \forall \alpha_i^{(\mathcal{N})} \in S, \forall \alpha_j^{(\mathcal{N})} \neq \alpha_i^{(\mathcal{N})} \\ \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | H_B | \alpha_i^{(\mathcal{N})} \rangle_B = \infty, \forall \alpha_i^{(\mathcal{N})} \in S \\ \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | H_B | \alpha_j^{(\mathcal{N})} \rangle_B = \langle \alpha_i^{(\mathcal{N})} | O^+ H O | \alpha_j^{(\mathcal{N})} \rangle_F, \forall \alpha_i^{(\mathcal{N})}, \alpha_j^{(\mathcal{N})} \notin S \end{cases} \quad (3.54)$$

où  $O$  l'opérateur est défini par (3.53).

➤ Orthogonalisation de Otsuka-Arima-Iachello (OAI) pour le modèle IBM [Ots78b]

Par opposition avec la démarche précédente qui ne privilégie aucune des images fermioniques  $|\alpha^{(\mathcal{N})}\rangle_F$  (d'où son caractère démocratique), l'algorithme OAI suppose une hiérarchie dans ces vecteurs et réalise en conséquence l'orthogonalisation par la méthode classique de Gramm-Schmidt. Plus précisément, si on se limite à IBM-1 par simplicité, une base orthonormée possible est donnée par l'ensemble des vecteurs comportant des nombres bien définis de bosons  $s$  et  $d$  couplés à un moment cinétique total  $J$ , soit  $|s^{\mathcal{N}_s}, d^{\mathcal{N}_d}, J, M\rangle$  (en réalité, ces états relatifs à la limite  $U(5)$ , doivent être caractérisés un nombre quantique supplémentaire dès que le nombre total de bosons est supérieur ou égal à 4). A ce moment-là, si l'on note  $S^+ = \sum_j \alpha_j^{(s)} [a_j^+ \otimes a_j^+]_0^p$  et  $D_\mu^+ = \sum_{j_1, j_2} \alpha_{j_1, j_2}^{(d)} [a_{j_1}^+ \otimes a_{j_2}^+]_\mu^2$  les opérateurs de paires collectives associées aux bosons  $s$  et  $d$ , l'image de chacun des états IBM-1 précédents s'obtient immédiatement :

$$\frac{1}{Z(\mathcal{N}_s, \mathcal{N}_d, J)} (S^+)^{\mathcal{N}_s} \left[ (D^+)^{\otimes \mathcal{N}_d} \right]_M^J | \rangle \quad (3.55)$$

où  $Z(\mathcal{N}_s, \mathcal{N}_d, J)$  est un facteur de normalisation. Le processus OAI propose alors d'orthogonaliser ces vecteurs par nombre décroissant de bosons  $s$  de façon à associer chaque ket  $|s^{\mathcal{N}_s}, d^{\mathcal{N}_d}, J, M\rangle$  à la projection de l'état fermionique correspondant (3.55) sur le sous-espace de séniorité  $\nu = 2\mathcal{N}_d$  (rappelons que la séniorité  $\nu$  représente le nombre de nucléons couplés à un moment cinétique non nul). A titre d'exemple, la bosonisation qui en résulte pour un système de 4 particules est donnée dans le tableau (3.6) ci-après. Sur le plan pratique, la méthode OAI s'est révélée fructueuse dans l'obtention microscopique d'hamiltoniens réalistes IBM-2 [Nak97] et IBM-3 [El96] même si, dans ce dernier cas, la conservation de l'isospin rend la démarche beaucoup plus complexe.



$ s^2, J=0, M=0\rangle \leftrightarrow \frac{1}{Z(2,0,0)} (S^+)^2   \rangle$
$ sd, J=2, M\rangle \leftrightarrow \frac{1}{Z(1,1,2)} S^+ D_M^+   \rangle$
$ d^2, J=0, M=0\rangle \leftrightarrow \frac{Cte}{Z(0,2,0)} \left[ [D^+ \otimes D^+]_0^0   \rangle - \frac{\langle  S^2 [D^+ \otimes D^+]_0^0   \rangle}{Z(2,0,0)} (S^+)^2   \rangle \right]$
$ d^2, J=2, M\rangle \leftrightarrow \frac{Cte}{Z(0,2,2)} \left[ [D^+ \otimes D^+]_M^2   \rangle - \frac{\langle  D_M S [D^+ \otimes D^+]_M^2   \rangle}{Z(1,1,2)} S^+ D_M^+   \rangle \right]$
$ d^2, J=4, M\rangle \leftrightarrow \frac{1}{Z(0,2,4)} [D^+ \otimes D^+]_M^4   \rangle$

**Tableau (3.6) :** Schéma de connexion entre les états modèles en couches de 4 nucléons identiques et les états à 2 bosons de IBM-1 via la méthode OAI

### III – Un premier exemple : influence du potentiel spin-orbite sur le développement des corrélations superfluides dans les noyaux N=Z

#### ❶ Présentation générale de l'étude

Commençons par rappeler qu'une clarification concernant la caractérisation des interactions d'appariement dans une couche majeure a été apportée par Dufour et Zuker en analysant la partie multipolaire des hamiltoniens effectifs réalistes [Duf96]. Précisément, leur étude montre que les propriétés superfluides du noyau atomique proviennent de corrélations dans les voies  $(L, S, T) = (0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  décrites par les hamiltoniens  $A_{0,1}^+ \cdot \tilde{A}_{0,1}$  et  $A_{1,0}^+ \cdot \tilde{A}_{1,0}$  où  $A_{S,T}^+$  désigne une paire collective de nucléons couplés à un moment orbital  $L=0$ , un spin  $S$  et un isospin  $T$ , soit :

$$A_{S,M_S,T,M_T}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}} \sum_l \sqrt{2l+1} [a_{l,1/2,1/2}^+ \otimes a_{l,1/2,1/2}^+]_{M_L=0,M_S,M_T}^{L=0,S,T} \quad \text{où } \Omega = \sum_l (2l+1) \quad (3.56)$$

En conséquence, l'interaction résiduelle d'appariement la plus générale peut donc s'écrire

$$V_p = -\frac{g\Omega(1+x)}{2} A_{0,1}^+ \cdot \tilde{A}_{0,1} - \frac{g\Omega(1-x)}{2} A_{1,0}^+ \cdot \tilde{A}_{1,0} \quad (3.57)$$



et se caractérise ainsi par les 2 paramètres que sont l'intensité totale  $g$  de l'interaction et la force relative  $x$  des appariements isoscalaire et isovectoriel.

Au niveau algébrique, chaque état propre de l'hamiltonien  $V_p$  appartient à un sous-espace irréductible d'un groupe  $SO_{ST}(8)$  [Flo64] généré par les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned}
 & A_{S,M_S,T,M_T}^+, A_{S,M_S,T,M_T} \left[ (S,T) = (0,1), (1,0), M_S = -S \rightarrow S, M_T = -T \rightarrow T \right] \\
 & \hat{N} = 2 \sum_l \sqrt{2l+1} \left[ a_{l,1/2,1/2}^+ \otimes \tilde{a}_{l,1/2,1/2} \right]_{M_L=0, M_S=0, M_T=0}^{L=0, S=0, T=0} \\
 & \quad \text{(nombre de particules)} \\
 & S_\mu = \sum_l \sqrt{2l+1} \left[ a_{l,1/2,1/2}^+ \otimes \tilde{a}_{l,1/2,1/2} \right]_{M_L=0, M_S=\mu, M_T=0}^{L=0, S=1, T=0} \quad (\mu = -1, 0, 1) \\
 & \quad \text{(observable de spin)} \\
 & T_\mu = \sum_l \sqrt{2l+1} \left[ a_{l,1/2,1/2}^+ \otimes \tilde{a}_{l,1/2,1/2} \right]_{M_L=0, M_S=0, M_T=\mu}^{L=0, S=0, T=1} \quad (\mu = -1, 0, 1) \\
 & \quad \text{(observable d'isospin)} \\
 & Y_{\mu,\nu} = \sum_l \sqrt{2l+1} \left[ a_{l,1/2,1/2}^+ \otimes \tilde{a}_{l,1/2,1/2} \right]_{M_L=0, M_S=\mu, M_T=\nu}^{L=0, S=1, T=1} \quad (\mu, \nu = -1, 0, 1) \\
 & \quad \text{(opérateur type Gamow-Teller)}
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

De plus, 3 valeurs spécifiques de l'asymétrie  $x$  autorisent une diagonalisation analytique en termes de chaînes de réduction. C'est ainsi que pour un appariement purement  $T = 1$  ( $x = 1$ ), l'interaction  $V_p$  a la symétrie dynamique :

$$SO_{ST}(8) \supset SU_S(2) \otimes SO_T(5) \supset SU_S(2) \otimes SU_T(2) \tag{3.60}$$

où les groupes  $SU_S(2)$ ,  $SU_T(2)$  et  $SO_T(5)$  sont respectivement définis par les générateurs  $\{S_\mu\}$ ,  $\{T_\mu\}$  et  $\{A_{S=0, M_S=0, T=1, M_T}^+, A_{S=0, M_S=0, T=1, M_T}, \hat{N}, T_\mu\}$ . De façon similaire un appariement seulement isoscalaire ( $x = -1$ ) correspond à la limite :

$$SO_{ST}(8) \supset SO_S(5) \otimes SU_T(2) \supset SU_S(2) \otimes SU_T(2), \tag{3.61}$$

la structure  $SO_S(5)$  étant engendrée par  $\{A_{S=1, M_S, T=0, M_T=0}^+, A_{S=1, M_S, T=0, M_T=0}, \hat{N}, S_\mu\}$ . Enfin, pour des intensités égales dans les voies  $T = 0$  et  $T = 1$  ( $x = 0$ ) l'hamiltonien  $V_p$  exhibe une invariance dynamique sous les transformations d'un groupe spin-isospin de Wigner  $SU_{ST}(4)$  généré par  $\{S_\mu, T_\mu, Y_{\mu,\nu}\}$  et ce conformément à la classification :

$$SO_{ST}(8) \supset SU_{ST}(4) \supset SU_S(2) \otimes SU_T(2) \tag{3.62}$$

D'autre part, en conséquence de la structure  $SO_{ST}(8)$  et de la discussion générale du paragraphe II-2, une réalisation exacte du spectre de  $V_p$  dans un espace de bosons s'avère réalisable par utilisation de l'expansion skélétonisée de Dyson. Les bosons collectifs à



considérer sont alors l'équivalent des paires  $A_{S,M_S,T,M_T}^+$  à partir desquelles l'hamiltonien s'exprime et correspondent ainsi à l'approche IBM-4 sans structure orbitale discutée au paragraphe I-3 de ce chapitre, les labels  $(s, m_s, t, m_t)$  des bosons s'identifiant à ceux  $(S, M_S, T, M_T)$  de la paire qu'ils représentent. La détermination explicite de l'image  $(V_P)_B$  qui résulte d'une telle bosonisation est par ailleurs aisée à obtenir à partir d'un recouplage de l'expression (3.38) [Van98]

$$\begin{aligned}
 (V_P)_B = & -\frac{g(1+x)}{2} \left\{ \Omega \hat{\mathcal{N}}_{0,1} - \hat{\mathcal{N}}_{0,1} \hat{\mathcal{N}}_{1,0} - \frac{3}{2} \left[ (b_{1,0}^+ \otimes b_{1,0}^+)^{0,0} \otimes (\tilde{b}_{0,1} \otimes \tilde{b}_{0,1})^{0,0} \right]_{0,0}^{0,0} \right\} \dots \\
 & -\frac{g(1-x)}{2} \left\{ \Omega \hat{\mathcal{N}}_{1,0} - \hat{\mathcal{N}}_{0,1} \hat{\mathcal{N}}_{1,0} - \frac{3}{2} \left[ (b_{0,1}^+ \otimes b_{0,1}^+)^{0,0} \otimes (\tilde{b}_{1,0} \otimes \tilde{b}_{1,0})^{0,0} \right]_{0,0}^{0,0} \right\} \dots \\
 & + \frac{9g(1+x)}{2} \sum_{T=0,2} \sqrt{2T+1} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & T \end{Bmatrix} \left[ (b_{0,1}^+ \otimes b_{0,1}^+)^{0,T} \otimes (\tilde{b}_{0,1} \otimes \tilde{b}_{0,1})^{0,T} \right]_{0,0}^{0,0} \dots \\
 & + \frac{9g(1-x)}{2} \sum_{S=0,2} \sqrt{2S+1} \begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & S \end{Bmatrix} \left[ (b_{1,0}^+ \otimes b_{1,0}^+)^{S,0} \otimes (\tilde{b}_{1,0} \otimes \tilde{b}_{1,0})^{S,0} \right]_{0,0}^{0,0}
 \end{aligned}$$

( $\hat{\mathcal{N}}_{s,t}$  désigne l'opérateur nombre de bosons de spin  $s$  et d'isospin  $t$ )

(3.63)

Notre étude vise alors précisément à analyser l'incidence de la structure en couches de l'espace de valence sur le développement des corrélations superfluides auxquelles le modèle  $SO_{ST}(8)$  donne naissance. En notant  $\rho = (n, l, j)$  les différentes orbites, l'hamiltonien considéré s'écrit donc :

$$H = \sum_{\rho} \varepsilon_{\rho} \sqrt{2(2j+1)} \left[ a_{\rho}^+ \otimes \tilde{a}_{\rho} \right]_{0,0}^{0,0} + V_P \quad (3.64)$$

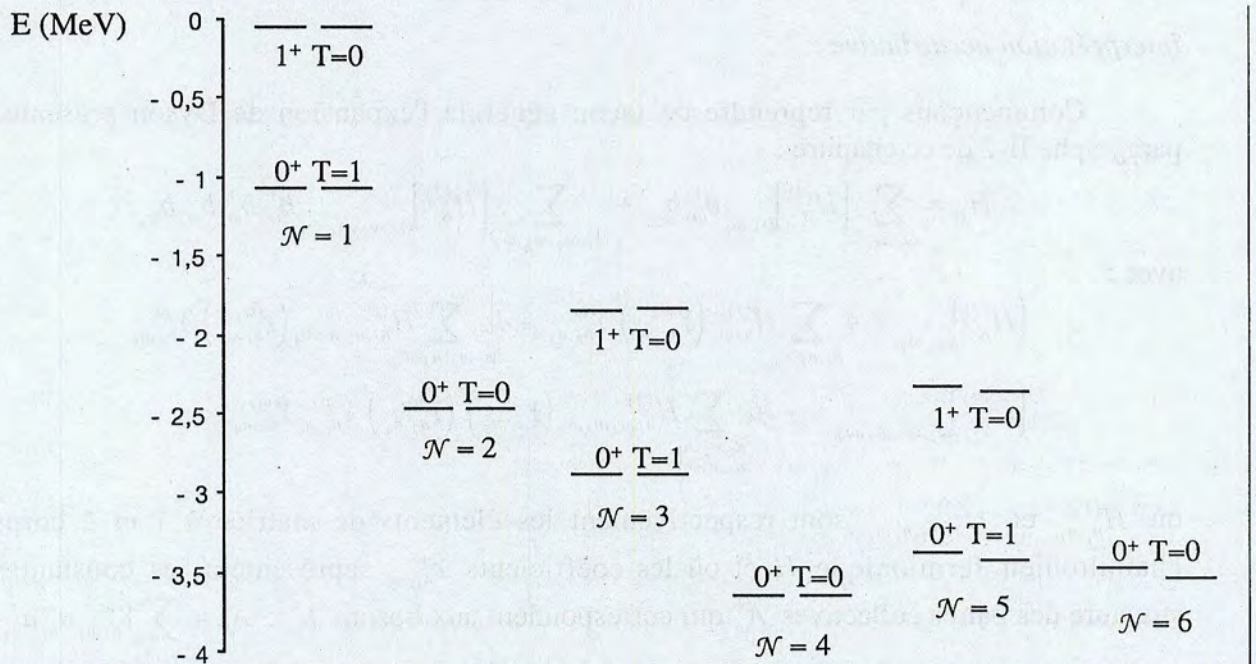
où  $\varepsilon_{\rho} = \varepsilon_{n,l}^{(0)} - \frac{V_{so}}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]$  désigne l'énergie de chaque couche en présence d'un potentiel spin-orbite  $-V_{so} \vec{l} \cdot \vec{s}$  ( $V_{so} > 0$ ). Dès lors, la classification  $LS$  des états propres de  $H$ , valable en l'absence de couplage spin-orbite, n'est plus qu'au mieux approximative et seuls les nombres quantiques  $J$  et  $T$  sont en fait rigoureusement conservés : pour 2 particules par exemple, les niveaux de plus basse énergie correspondent maintenant à  $(J, T) = (0, 1)$  et  $(1, 0)$  avec une composante  $(L, S, T) = (0, 0, 1)$  et  $(0, 1, 0)$  d'autant moins importante que  $V_{so}$  est élevé. De même, le découplage par l'hamiltonien des états formés à partir des paires énergétiquement favorisées est brisé par l'introduction de  $V_{so}$ . En conséquence, la simple troncation de l'expansion de Dyson aux bosons associés à ces paires  $(J, T) = (0, 1)$  et  $(1, 0)$  n'est plus exacte. Si on se limite toutefois à des valeurs relativement faibles de  $V_{so}$ , il est raisonnable de penser qu'une telle façon de procéder permette d'obtenir une bonne estimation de la spectroscopie à basse énergie du système. Précisons également que le modèle de bosons qui en résulte



correspond toujours au formalisme IBM-4( $l=0$ ) du paragraphe I : simplement, le spin  $s$  des bosons s'identifie maintenant au moment cinétique total  $J$  d'une paire collective de nucléons et devient donc sans rapport avec le nombre quantique  $S$  de l'espace à 2 fermions. Plus précisément :

$$\begin{cases} b_{s,m_s,t,m_t}^+ \\ (s,t) = (0,1) \text{ ou } (1,0) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A_{J,M_J,T,M_T}^+ \\ s = J, m_s = M_J, t = T, m_t = M_T \end{cases} \quad (3.65)$$

En dépit des arguments précédents, nous avons tout de même souhaité vérifier directement la validité du traitement en bosons de l'hamiltonien (3.64) qui vient d'être exposé. Dans ce but, une comparaison avec les niveaux obtenus par diagonalisation dans l'espace fermionique a été effectuée dans une couche  $sd$  avec un écart  $\varepsilon_d^{(0)} - \varepsilon_s^{(0)} = 1 \text{ MeV}$ , un potentiel spin-orbite relativement fort  $V_{so} = 2 \text{ MeV}$  (valeurs réalistes), une intensité d'appariement arbitraire  $g = 0.333 \text{ MeV}$ , et une asymétrie  $x = 0.8$  qui rend importante la non-hermiticité de l'image de Dyson (cf. l'expression (3.63) de l'hamiltonien en bosons pour  $V_{so} = 0$ ). D'ailleurs, pour éviter les problèmes liés à cette non-hermiticité, la formule de Takada (3.43.b) a été employée. Les résultats obtenus sont rassemblés dans la figure (3.2) ci-dessous et permettent de constater un excellent accord entre la description IBM-4( $l=0$ ) et celle du modèle en couches au moins pour le niveau  $(S,T) = (0,0)$  des noyaux  $N = Z$  pair-pair ainsi que pour les états  $(S,T) = (0,1), (1,0)$  des systèmes impair-impair  $N = Z$ .



**Figure (3.2) :** Comparaison entre les niveaux d'énergie de l'hamiltonien  $SO_{ST}(8)$  avec couplage spin-orbite et ceux issus de son image IBM-4( $l=0$ ) dans une couche  $sd$ . Pour chaque noyau repéré par son nombre de bosons  $N$ , les niveaux fermioniques sont indiqués dans la première colonne et ceux de la description en bosons dans la seconde.



Finalement, une étude analogue a été entreprise pour la couche  $fp$  où un calcul fermionique est rapidement limité. Les évaluations numériques ont de plus été effectuées avec un niveau  $p$  situé  $1 \text{ MeV}$  au-dessus de la couche  $f$  et avec une intensité totale  $g = 0.7 \text{ MeV}$  proche de la valeur réaliste déduite par Dufour et Zuker [Duf96].

## ② Isospin du niveau fondamental des noyaux impair-impair $N=Z$

Les graphes de la figure (3.3) ci-après montrent l'écart énergétique entre les états fondamentaux IBM-4( $l=0$ ) des voies  $(S,T)=(0,1)$  et  $(1,0)$  pour un nombre impair de bosons. Leur examen permet immédiatement de constater que :

- pour un appariement majoritairement isoscalaire ( $x < 0$ ) ou de même intensité dans les canaux  $T=0$  et  $T=1$  ( $x=0$ ), l'état  $T=0$  est progressivement défavorisé par l'introduction du potentiel spin-orbite et ce d'autant plus que le nombre de particules est important.
- si l'appariement est plus fort dans le canal isovectoriel ( $x > 0$ ), le couplage spin-orbite est quasiment sans influence sur la position relative des états  $T=0$  et  $T=1$ .

Signalons que la stabilisation de l'état  $T=1$  par le potentiel spin-orbite avait déjà été suggérée par Poves & al [Pov98] sur la base d'arguments qualitatifs, mais à notre connaissance l'étude présentée constitue la première mise en évidence directe et quantitative de ce résultat.

### Interprétation perturbative :

Commençons par reprendre de façon générale l'expansion de Dyson présentée au paragraphe II-2 de ce chapitre :

$$H_B = \sum_{\omega_1, \omega_2} [H_B^{(1)}]_{\omega_1, \omega_2} b_{\omega_1}^+ b_{\omega_2} + \sum_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} [H_B^{(2)}]_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} b_{\omega_1}^+ b_{\omega_2}^+ b_{\omega_3} b_{\omega_4}$$

avec :

$$\begin{aligned} [H_B^{(1)}]_{\omega_1, \omega_2} &= 4 \sum_{n_1, n_2, n_3} H_{n_1, n_2}^{(1)} (Y_{n_1, n_3}^{\omega_1})^* Y_{n_2, n_3}^{\omega_2} - 4 \sum_{n_1, n_2, n_3, n_4} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_2}^{\omega_1})^* Y_{n_3, n_4}^{\omega_2} \\ [H_B^{(2)}]_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} &= -16 \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \\ n_4, n_5, n_6}} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} (Y_{n_1, n_5}^{\omega_1})^* (Y_{n_2, n_6}^{\omega_2})^* Y_{n_5, n_6}^{\omega_3} Y_{n_3, n_4}^{\omega_4} \end{aligned}$$

où  $H_{n_1, n_2}^{(1)}$  et  $H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)}$  sont respectivement les éléments de matrice à 1 et 2 corps de l'hamiltonien fermionique  $H$  et où les coefficients  $Y_{n_1, n_2}^{\omega}$  représentent les constantes de structure des paires collectives  $A_{\omega}^+$  qui correspondent aux bosons  $b_{\omega}^+$  :  $A_{\omega}^+ = \sum_{n_1, n_2} Y_{n_1, n_2}^{\omega} a_{n_1}^+ a_{n_2}^+$ . Or

dans le cas présent, les paires bosonisées diagonalisent  $H$  et donc  $HA_{\omega}^+ = \varepsilon_{\omega} A_{\omega}^+$ ,  $\varepsilon_{\omega}$  désignant l'énergie associée. Pour tout couple  $(n_1, n_2)$  d'états individuels, on a ainsi  $\langle a_{n_1} a_{n_2} HA_{\omega}^+ | \rangle = \varepsilon_{\omega} \langle a_{n_1} a_{n_2} A_{\omega}^+ | \rangle$ , c'est-à-dire :

$$\sum_{n_3} (H_{n_1, n_3}^{(1)} Y_{n_3, n_2}^{\omega} - H_{n_2, n_3}^{(1)} Y_{n_3, n_1}^{\omega}) - 2 \sum_{n_3, n_4} H_{n_1, n_2, n_3, n_4}^{(2)} Y_{n_3, n_4}^{\omega} = \varepsilon_{\omega} Y_{n_1, n_2}^{\omega} \quad (3.66)$$



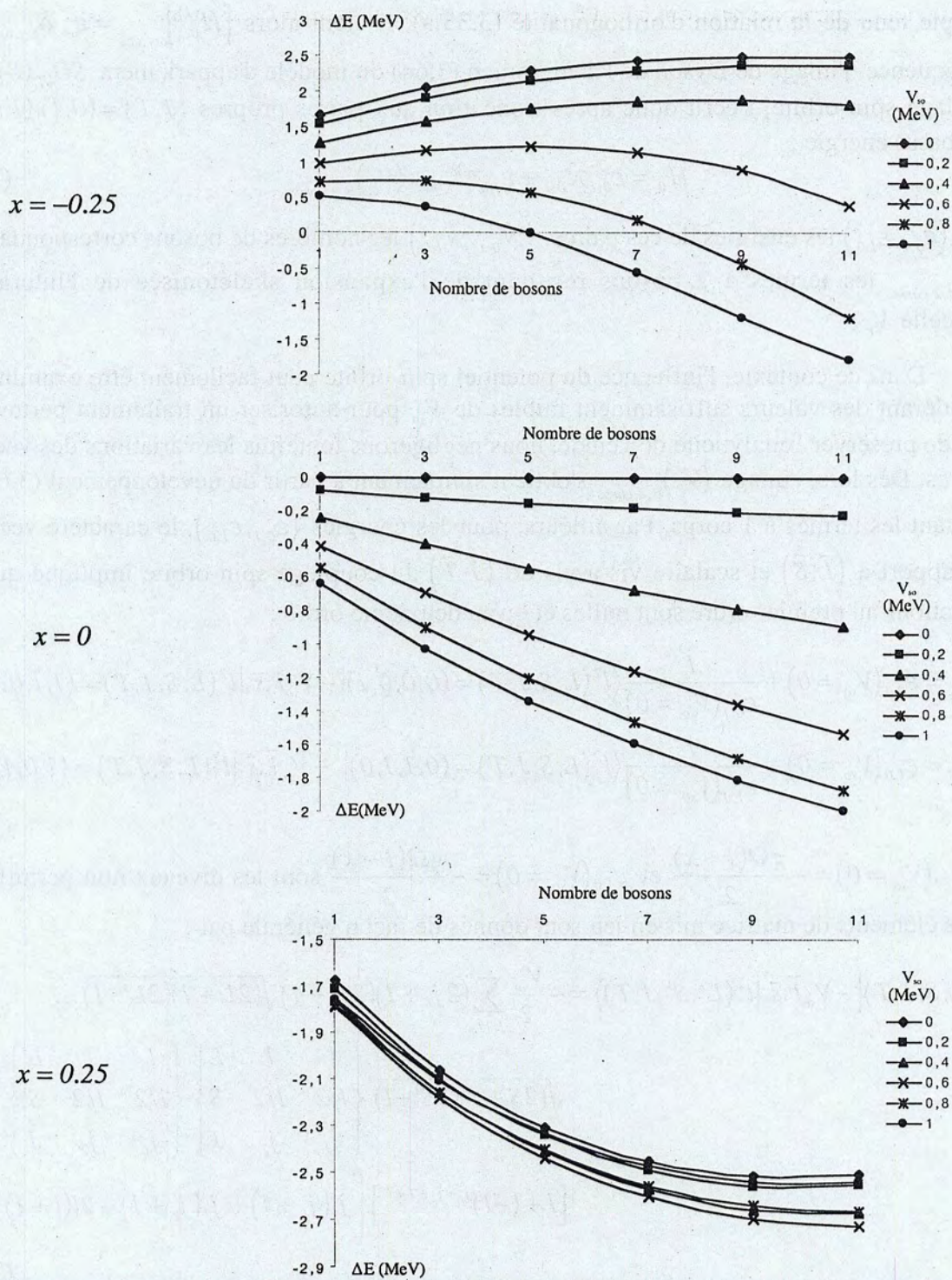


Figure (3.3) : Evolution dans le cadre du modèle IBM-4( $l=0$ ) de l'écart  $\Delta E = E(S=0, T=1) - E(S=1, T=0)$  entre les niveaux isovectoriels et isoscalaires des noyaux  $N=Z$  impair-impair de la couche  $fp$ .  $V_{so}$  désigne le potentiel spin-orbite et  $x$  l'asymétrie entre les appariements.



Compte tenu de la relation d'orthogonalité (3.33.a), il vient alors  $[H_B^{(I)}]_{\omega_1, \omega_2} = \varepsilon_{\omega_1} \delta_{\omega_1, \omega_2}$ . En conséquence, l'image de Dyson de l'hamiltonien (3.64) du modèle d'appariement  $SO_{ST}(8)$  avec couplage spin-orbite, s'écrit donc après troncation aux paires propres  $(J, T) = (0, 1), (1, 0)$  de plus basse énergie :

$$H_B = \varepsilon_{0,1} \hat{\mathcal{N}}_{0,1} + \varepsilon_{1,0} \hat{\mathcal{N}}_{1,0} + (V_P)_{B,2 \text{ corps}} \quad (3.67)$$

avec  $(\varepsilon_{0,1}, \varepsilon_{1,0})$  les énergies de ces paires,  $(\hat{\mathcal{N}}_{0,1}, \hat{\mathcal{N}}_{1,0})$  les nombres de bosons correspondants et  $(V_P)_{B,2 \text{ corps}}$  les termes à 2 bosons résultant de l'expansion skélétonisée de l'interaction résiduelle  $V_P$ .

Dans ce contexte, l'influence du potentiel spin-orbite peut facilement être examinée en considérant des valeurs suffisamment faibles de  $V_{so}$  pour autoriser un traitement perturbatif. Afin de préserver l'analyticité de l'étude, nous négligerons toutefois les variations des vecteurs propres. Dès lors, l'image  $(V_P)_{B,2 \text{ corps}}$  s'obtient simplement à partir du développement (3.63) en omettant les termes à 1 corps. Par ailleurs, pour les énergies  $(\varepsilon_{0,1}, \varepsilon_{1,0})$ , le caractère vectoriel par rapport à  $(\vec{L}, \vec{S})$  et scalaire vis-à-vis de  $(\vec{J}, \vec{T})$  du couplage spin-orbite implique que les corrections au premier ordre sont nulles et qu'au deuxième ordre :

$$\begin{cases} \varepsilon_{0,1} = \varepsilon_{0,1}(V_{so} = 0) + \frac{1}{\varepsilon_{0,1}(V_{so} = 0)} \langle l^2(L, S, J, T) = (0, 0, 0, 1) | -V_{so} \vec{L} \cdot \vec{S} | l^2(L, S, J, T) = (1, 1, 0, 1) \rangle^2 \\ \varepsilon_{1,0} = \varepsilon_{1,0}(V_{so} = 0) + \frac{1}{\varepsilon_{1,0}(V_{so} = 0)} \langle l^2(L, S, J, T) = (0, 1, 1, 0) | -V_{so} \vec{L} \cdot \vec{S} | l^2(L, S, J, T) = (1, 0, 1, 0) \rangle^2 \end{cases} \quad (3.68)$$

où  $\varepsilon_{0,1}(V_{so} = 0) = -\frac{g\Omega(1+x)}{2}$  et  $\varepsilon_{1,0}(V_{so} = 0) = -\frac{g\Omega(1-x)}{2}$  sont les niveaux non-perturbés et où les éléments de matrice mis en jeu sont donnés de façon générale par :

$$\begin{aligned} \langle l^2(L, S, J, T) | -V_{so} \vec{L} \cdot \vec{S} | l^2(L', S', J, T) \rangle &= -\frac{V_{so}}{2} \sum_{j_1, j_2} (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \sqrt{(2L+1)(2L'+1)} \dots \\ &\quad \sqrt{(2S+1)(2S'+1)} \begin{Bmatrix} l & l & L \\ 1/2 & 1/2 & S \\ j_1 & j_2 & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & l & L' \\ 1/2 & 1/2 & S' \\ j_1 & j_2 & J \end{Bmatrix} \dots \\ &\quad [1 + (-1)^{j_1+j_2+J+T}] \left[ j_1(j_1+1) + j_2(j_2+1) - 2l(l+1) - \frac{3}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

Dans les cas qui nous intéressent, les symboles 9-j se ramènent en fait à des coefficients de Racah connus analytiquement et ainsi :

$$\varepsilon_{0,1} = \varepsilon_{0,1}(V_{so} = 0) + \frac{V_{so}^2 l(l+1)}{\varepsilon_{0,1}(V_{so} = 0)} \text{ et } \varepsilon_{1,0} = \varepsilon_{1,0}(V_{so} = 0) + \frac{V_{so}^2 l(l+1) (\Omega^2 - 2)^2}{3\Omega^4 \varepsilon_{1,0}(V_{so} = 0)} \quad (3.70)$$



Finalement, nous avons choisi de poursuivre l'étude uniquement pour des interactions d'appariement également intenses dans les voies  $T=0$  et  $T=1$  ( $x=0$ ). Dans ce cas, l'hamiltonien (3.67) se réécrit en effet sous la forme suivante où  $\hat{N}$  désigne l'opérateur nombre de bosons et  $C_2[SU_{ST}(4)]$  l'invariant quadratique de l'algèbre  $SU_{ST}(4)$  du modèle IBM-4( $l=0$ ) (une expression de cet opérateur pourra être trouvée en annexe) :

$$H_B = -g \left( \frac{\Omega}{2} + \frac{11}{4} \right) \hat{N} + \frac{g}{4} \hat{N}(\hat{N} + 5) + \frac{g}{4} C_2[SU_{ST}(4)] + V$$

$$\text{avec } V = -\frac{2V_{so}^2 l(l+1)}{g\Omega} \hat{N}_{0,1} - \frac{2V_{so}^2 l(l+1) (\Omega^2 - 2)^2}{3g\Omega^5} \hat{N}_{1,0} \quad (3.71)$$

Le potentiel spin-orbite ayant été supposé faible,  $V$  apparaît alors comme une perturbation par rapport à un hamiltonien ayant la symétrie  $SU_{ST}(4)$  et pour lequel de nombreux résultats analytiques ont été établis au paragraphe I-4. Il est donc envisageable que l'on puisse parvenir ainsi à des expressions littérales concernant la sensibilité au couplage spin-orbite des propriétés superfluides des noyaux  $N=Z$ . Concernant en particulier l'écart  $\Delta E$  entre les niveaux IBM-4( $l=0$ ) de plus basse énergie dans les systèmes impair-impair, l'usage de la théorie des perturbations au premier ordre sur les états  $SU_{ST}(4)$  de la représentation favorisée  $[1,1]$  amène à :

$$E(S=0, T=1) = -g \left( \frac{\Omega}{2} + \frac{11}{4} \right) \mathcal{N} + \frac{g}{4} \mathcal{N}(\mathcal{N} + 5) + \frac{5g}{4} \dots$$

$$- \frac{2V_{so}^2 l(l+1)}{g\Omega} \langle \mathcal{N}_{0,1} \rangle_{S=0, T=1}^{SU_{ST}(4)} - \frac{2V_{so}^2 l(l+1) (\Omega^2 - 2)^2}{3g\Omega^5} \langle \mathcal{N}_{1,0} \rangle_{S=0, T=1}^{SU_{ST}(4)} \quad (3.72)$$

où nous avons utilisé les valeurs propres (1.75) de  $C_2[SU(N)]$  et où les nombres moyens de bosons à la limite  $SU_{ST}(4)$  sont donnés dans le tableau (3.4). Une expression similaire peut également être trouvée pour l'énergie de l'état  $S=1, T=0$  et après calcul, il vient finalement :

$$\Delta E = E(S=0, T=1) - E(S=1, T=0) = -\frac{V_{so}^2 (\mathcal{N} + 3) l(l+1) [1 + 16l(l+1) + 16l^2(l+1)^2]}{3g\Omega^5} \quad (3.73)$$

On retrouve bien ainsi que l'introduction du couplage spin-orbite favorise énergétiquement le niveau  $T=1$  avec de plus un comportement linéaire en fonction du nombre  $\mathcal{N}$  de bosons qui est d'ailleurs observé à  $x=0$  et  $V_{so}$  faible sur la figure (3.3).

### ③ Evolution de la structure en paires

Les résultats obtenus sont consignés dans les histogrammes tridimensionnels (3.4), (3.5) et (3.6) qui représentent, en fonction de l'asymétrie  $x$  entre les 2 appariements et du potentiel spin-orbite  $V_{so}$ , les nombres moyens de bosons isoscalaires dans les états IBM-4( $l=0$ )



( $S=0, T=1$ ) et ( $S=1, T=0$ ) du manganèse 50 ( $N=Z=25$ ) ainsi que dans le niveau fondamental ( $S=0, T=0$ ) du noyau pair-pair de  $^{52}\text{Fe}$  ( $N=Z=26$ ).

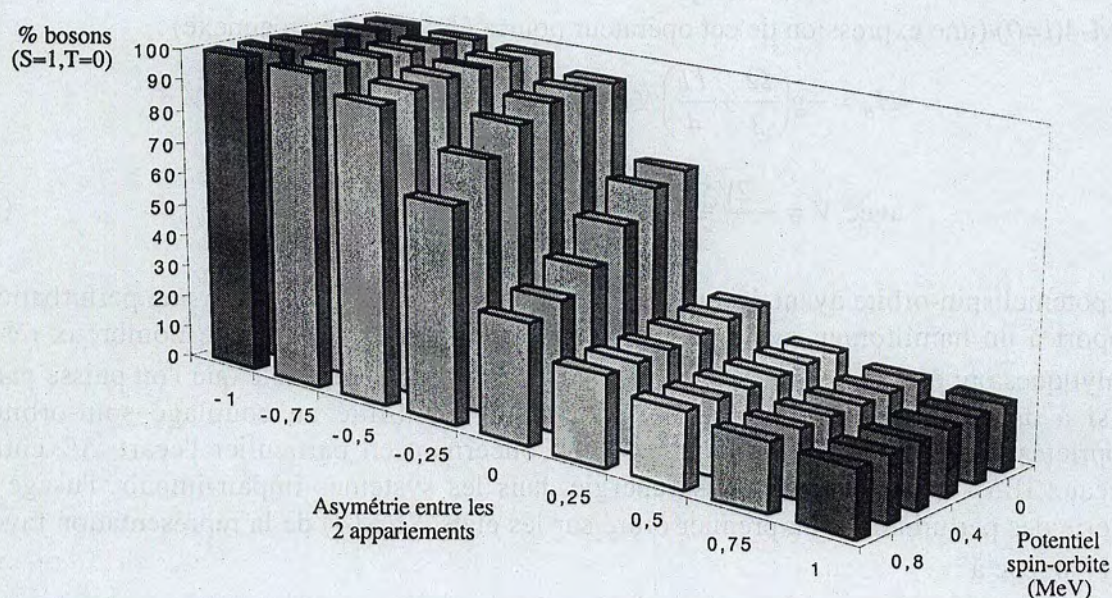


Figure (3.4) : Structure en paires proton-neutron isoscalaires de l'état IBM-4( $l=0$ )  $S=1, T=0$  du  $^{50}\text{Mn}$  selon la constante de couplage spin-orbite et l'intensité relative des 2 appariements

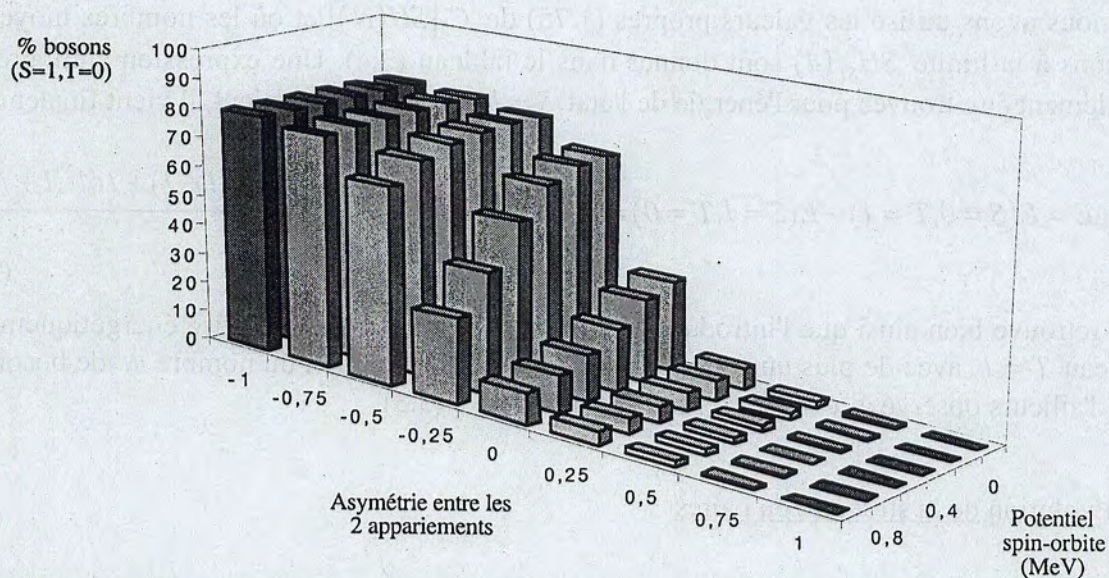


Figure (3.5) : Structure en paires proton-neutron isoscalaires de l'état IBM-4( $l=0$ )  $S=0, T=1$  du  $^{50}\text{Mn}$  selon la constante de couplage spin-orbite et l'intensité relative des 2 appariements



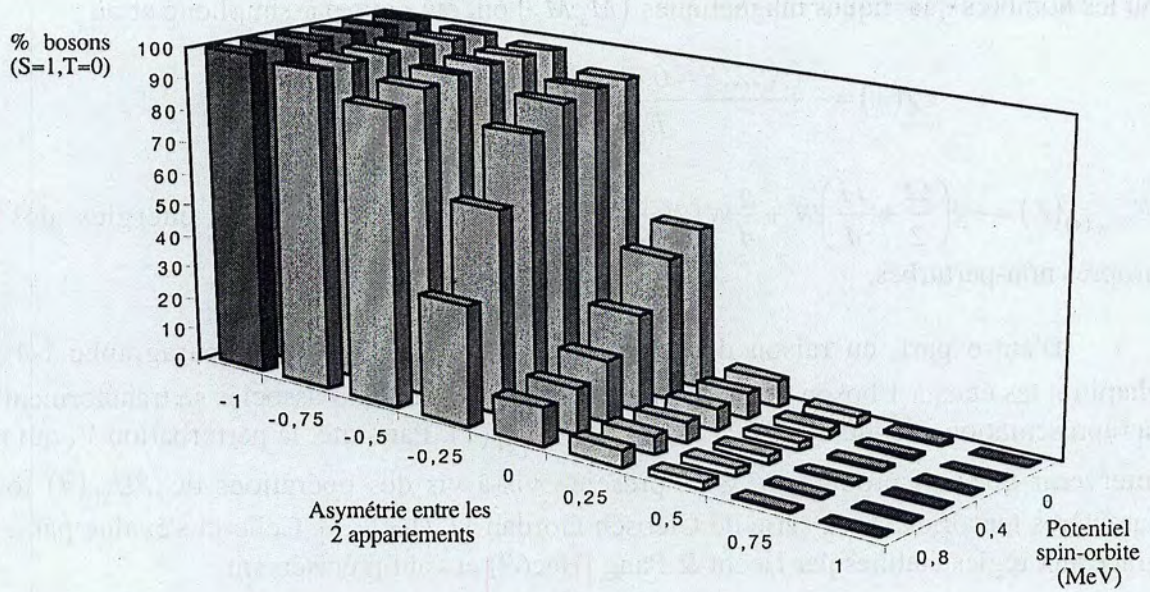


Figure (3.6) : Structure en paires proton-neutron isoscalaires de l'état IBM-4( $l=0$ )  $S=0, T=0$  du  $^{52}\text{Fe}$  selon la constante de couplage spin-orbite et l'intensité relative des 2 appariements

Ces différents graphes amènent naturellement à conclure que l'intervention des paires proton-neutron isoscalaires dans les états de plus basse énergie des noyaux  $N=Z$  est considérablement limitée par la présence d'un appariement majoritairement isovectoriel (ce qui est logique) et par le potentiel spin-orbite dont l'affinité vis-à-vis des structures  $T=1$  est ainsi de nouveau mise en évidence. Signalons de plus que cette influence de  $V_{so}$  est confinée au voisinage de la limite  $SU_{ST}(4)$  correspondant à des appariements de même intensité dans les canaux  $T=0$  et  $T=1$ .

#### Interprétation perturbative :

Reprenons l'hamiltonien IBM-4( $l=0$ ) obtenu au paragraphe précédent pour un faible potentiel spin-orbite  $V_{so}$  et une asymétrie  $x=0$  :

$$H_B = -g \left( \frac{\Omega}{2} + \frac{11}{4} \right) \hat{N} + \frac{g}{4} \hat{N}(\hat{N}+5) + \frac{g}{4} C_2[SU_{ST}(4)] + V$$

$$\text{avec } V = -\frac{2V_{so}^2 l(l+1)}{g\Omega} \hat{N}_{0,1} - \frac{2V_{so}^2 l(l+1) (\Omega^2 - 2)^2}{3g\Omega^5} \hat{N}_{1,0}$$

En reprenant la notation  $|\mathcal{N}, \lambda, SM_S, TM_T\rangle$  du paragraphe I-4 pour les états propres  $SU_{ST}(4)$  de  $H_B$  en l'absence de couplage spin-orbite, l'état fondamental d'un noyau pair-pair  $N=Z$  s'écrit ainsi au premier ordre :

$$|\mathcal{N}, S=0, T=0\rangle \propto |\mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0\rangle + \sum_{\lambda \neq 0} \chi(\lambda) |\mathcal{N}, \lambda, S=0, T=0\rangle \quad (3.74)$$



où les nombres quantiques magnétiques  $(M_S, M_T)$  ont été omis par simplicité et où :

$$\chi(\lambda) = - \frac{\langle \mathcal{N}, \lambda, S=0, T=0 | V | \mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0 \rangle}{E_{SU_{ST}(4)}(\lambda) - E_{SU_{ST}(4)}(0)}, \quad (3.75)$$

$E_{SU_{ST}(4)}(\lambda) = -g \left( \frac{\Omega}{2} + \frac{11}{4} \right) \mathcal{N} + \frac{g}{4} \mathcal{N}(\mathcal{N}+5) + \frac{g}{4} \lambda(\lambda+4)$  désignant les énergies des états propres non-perturbés.

D'autre part, en raison des règles de réduction données au paragraphe I-4 de ce chapitre, les états à 1 boson et les opérateurs  $b^+, \tilde{b}$  qui leur sont associés se transforment selon la représentation irréductible  $[1,1]$  du groupe  $SU_{ST}(4)$ . Par suite, la perturbation  $V$ , qui ne fait intervenir que des produits  $b^+ \otimes \tilde{b}$ , présente vis-à-vis des opérations de  $SU_{ST}(4)$  tous les caractères tensoriels de la série de Clebsch-Gordan  $[1,1] \otimes [1,1]$ . Celle-ci s'évalue par ailleurs grâce aux règles établies par Hecht & Pang [Hec69] et vaut précisément :

$$[1,1] \otimes [1,1] = [0] \oplus [2,1,1] \oplus [2,2] \quad (3.76)$$

Or en IBM-4 ( $l=0$ ) seules les RI de  $SU_{ST}(4)$  ayant la forme générale  $[\lambda, \lambda]$  sont susceptibles de respecter la statistique des bosons (cf. I-4) et la décomposition de  $V$  en tenseurs  $V^{[\lambda, \lambda]}$  par rapport à  $SU_{ST}(4)$  s'écrit donc  $V = V^{[0]} + V^{[2,2]}$ . Mais, compte tenu du théorème de Wigner-Eckart, chaque composante  $V^{[\lambda, \lambda]}$  ne peut connecter l'état non-perturbé  $[0]$  qu'avec avec un vecteur se transformant en  $SU_{ST}(4)$  selon l'une des RI du produit  $[0] \otimes [\lambda, \lambda] = [\lambda, \lambda]$ .

Finalement, seuls les éléments de matrice  $\begin{cases} \langle \mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0 | V | \mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0 \rangle \\ \langle \mathcal{N}, \lambda=2, S=0, T=0 | V | \mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0 \rangle \end{cases}$  sont donc non nuls et comme le premier est exclus du développement perturbatif (3.74), il vient :

$$|\mathcal{N}, S=0, T=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\chi^2}} [ |\mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0\rangle + \chi |\mathcal{N}, \lambda=2, S=0, T=0\rangle ]$$

$$\text{où } \chi = -\frac{1}{3g} \langle \mathcal{N}, \lambda=2, S=0, T=0 | V | \mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0 \rangle \quad (3.77)$$

Le calcul de cet élément de matrice peut alors simplement s'effectuer en décomposant les vecteurs sur la base  $SU_S(3) \otimes SU_T(3)$  qui conserve les nombres de bosons  $(\mathcal{N}_{1,0}, \mathcal{N}_{0,1})$  de sorte que :

$$\chi = -\frac{1}{3g} \sum_{\substack{\omega=0 \\ \omega \text{ pair}}}^{\mathcal{N}} \xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda=2, S=0, T=0} \xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0} \dots$$

$$\langle \mathcal{N}, (\omega, \mathcal{N}-\omega), S=0, T=0 | V | \mathcal{N}, (\omega, \mathcal{N}-\omega), S=0, T=0 \rangle \quad (3.78)$$

$$= -\frac{2V_{so}^2 l(l+1)}{g\Omega} (\mathcal{N}-\omega) - \frac{2V_{so}^2 l(l+1) (\Omega^2-2)^2}{3g\Omega^3} \omega$$



Les coefficients de changement de base  $\xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0}$  ont par ailleurs été évalués au paragraphe I-4 [cf. tableau (3.3)] et en procédant de la même manière, nous avons également pu trouver que :

$$\xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda=2, S=0, T=0} = (-1)^{(\mathcal{N}-\omega)/2} (\mathcal{N}-2\omega) \left[ \frac{32 (\omega+1)!! (\mathcal{N}-\omega+1)!!}{\mathcal{N}(\mathcal{N}+2) (\mathcal{N}+4) (\mathcal{N}+6) \omega!! (\mathcal{N}-\omega)!!} \right]^{1/2} \quad (\omega \text{ pair}) \quad (3.79)$$

A ce moment-là, il ne reste plus qu'à effectuer par récurrence les sommations sur  $\omega$  de la relation (3.78) pour finalement parvenir à l'expression suivante du coefficient de mélange  $\chi$  :

$$\chi = \frac{V_{so}^2 \sqrt{\mathcal{N}(\mathcal{N}+6)} l(l+1) [1 + 16l(l+1) + 16l^2(l+1)^2]}{9g^2 \Omega^5} \quad (3.80)$$

Le nombre moyen de bosons isoscalaires dans l'état perturbé (3.77) se calcule alors assez facilement puisqu'il s'écrit :

$$\langle \mathcal{N}_{1,0} \rangle = \frac{1}{1+\chi^2} \sum_{\substack{\omega=0 \\ \omega \text{ pair}}}^{\mathcal{N}} \left[ \left( \xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0} \right)^2 + 2\chi \xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda=0, S=0, T=0} \xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda=2, S=0, T=0} + \chi^2 \left( \xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda=2, S=0, T=0} \right)^2 \right] \omega \quad (3.81)$$

En utilisant les valeurs de  $\xi_{\omega}^{\mathcal{N}, \lambda, S=0, T=0}$  données ci-dessus ainsi que dans le tableau (3.3) et en évaluant de nouveau les sommes par récurrence, il vient précisément pour un noyau pair-pair  $N=Z$  et jusqu'au 2-ème ordre en  $V_{so}$  :

$$\langle \mathcal{N}_{1,0} \rangle = \frac{\mathcal{N}}{2} - \frac{V_{so}^2 \mathcal{N}(\mathcal{N}+6) l(l+1) [1 + 16l(l+1) + 16l^2(l+1)^2]}{18 g^2 \Omega^5} \quad (3.82)$$

On retrouve donc bien le comportement observé dans les graphes précédents, à savoir un appauvrissement en paires isoscalaires de l'état fondamental des noyaux  $N=Z$  au fur à mesure que le potentiel spin-orbite  $V_{so}$  augmente. Par ailleurs, l'évolution linéaire avec le nombre  $\mathcal{N}$  de bosons de la proportion  $\langle \mathcal{N}_{1,0} \rangle / \mathcal{N}$  se vérifie aux faibles valeurs de  $V_{so}$  sur la figure (3.7) ci-après.

Pour conclure, nous avons rassemblé sur la courbe (3.8) la structure en paires proton-neutron  $T=0$  de l'état fondamental de tous les noyaux  $N=Z$  étudiés dans la couche  $fp$  lorsque les appariements  $T=0$  et  $T=1$  sont également intenses. La structure en "zigzag" observée correspond en fait à un effet pair-pair / impair-impair associé à l'isospin du niveau fondamental. En effet, l'état de plus basse énergie pour un nombre  $\mathcal{N}$  de bosons pair est toujours isoscalaire, alors qu'il est isovectoriel lorsque  $\mathcal{N}$  est impair (cf. paragraphe précédent III-2) et logiquement la présence des paires  $T=0$  est donc défavorisée dans ce dernier cas. Signalons d'ailleurs qu'un tel comportement a déjà été mis en évidence dans des approches plus réalistes basées sur un traitement Monte-Carlo du modèle en couches [Eng96] et nous retrouverons un résultat similaire dans les calculs IBM-4 au delà du  $^{56}\text{Ni}$  présentés au paragraphe IV-3 de ce chapitre. L'étude réalisée ici montre en plus que l'amplitude des écarts pair-pair / impair-impair est considérablement réduite par le potentiel spin-orbite qui tend globalement à uniformiser la proportion de bosons isoscalaires vers une valeur quasiment marginale ( $\approx 10\%$ ).



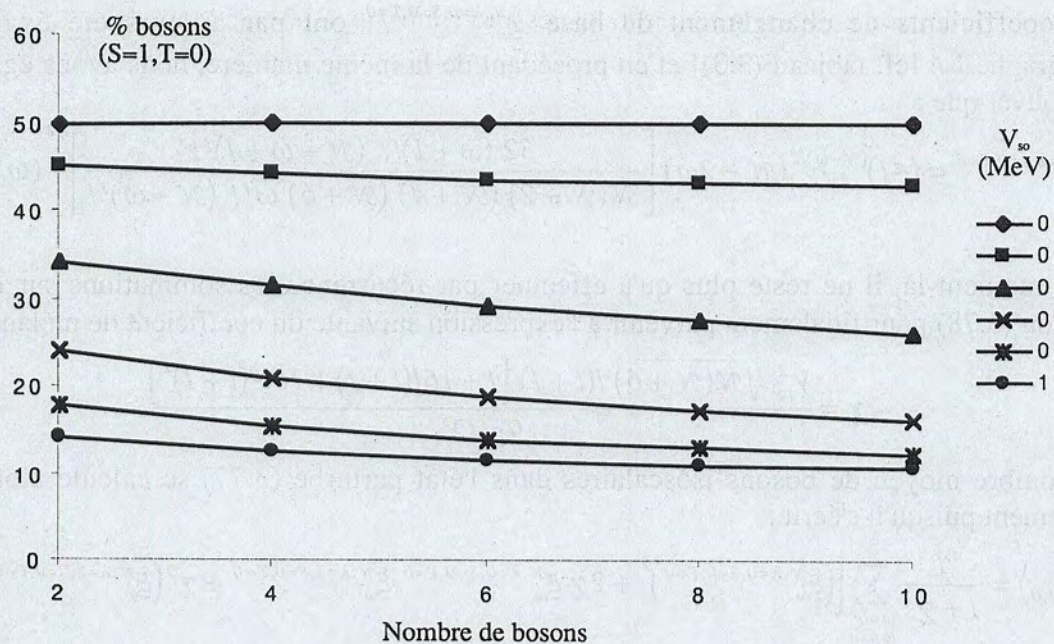


Figure (3.7) : Influence du potentiel spin-orbite  $V_{so}$  sur la proportion de bosons isoscalaires dans l'état IBM-4( $l=0$ )  $S=0, T=0$  de quelques noyaux  $N=Z$  pair-pair de la couche  $fp$  lorsque qu'aucun des appariements  $T=0$  et  $T=1$  n'est privilégié ( $x=0$ )

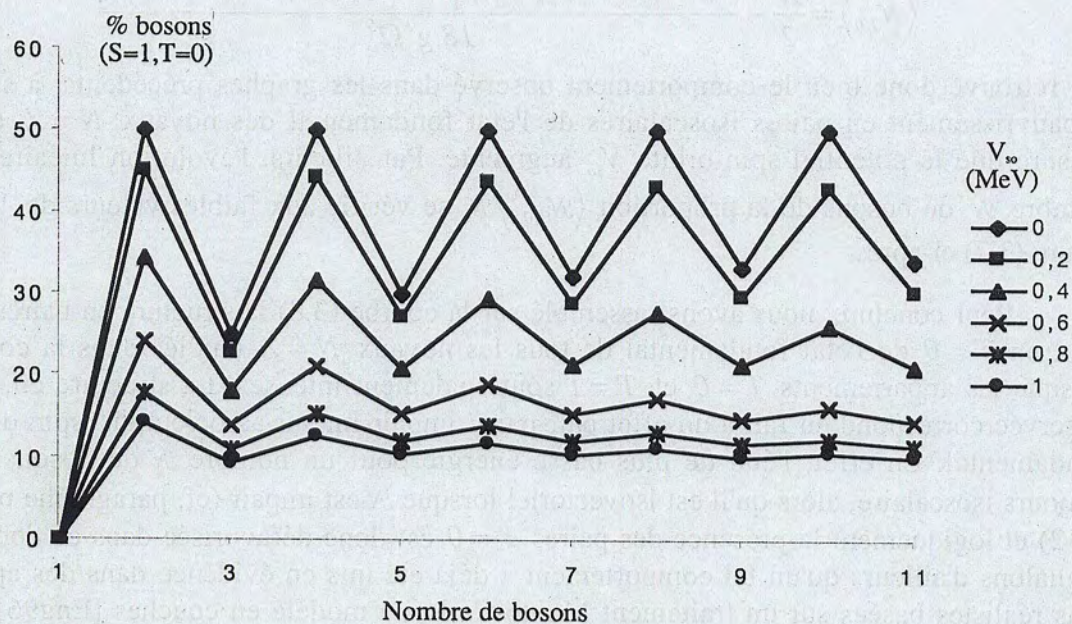


Figure (3.8) : Evolution avec le potentiel spin-orbite  $V_{so}$  de la structure en paires de l'état fondamental des noyaux  $N=Z$  de la couche  $fp$  pour des appariements isoscalaire et isovectoriel de même intensité.



#### ④ Rôle de l'appariement isoscalaire dans les anomalies de masse de Wigner

Ces anomalies ont déjà fait l'objet d'une attention particulière au chapitre 2 de ce mémoire (cf. I-2-b). Précisons simplement de nouveau que les noyaux  $N = Z$  présentent une énergie de liaison additionnelle connue sous le nom d'énergie de Wigner et qui se manifeste également par l'apparition d'une singularité  $W(A)$  de la double différence de masse  $\delta V_{np}$ . C'est ainsi que dans le cas d'un système pair-pair :

$$W(A) = \delta V_{np}(N, Z) - \frac{1}{2} [\delta V_{np}(N, Z-2) + \delta V_{np}(N+2, Z)] \quad (N = Z = A/2) \quad (3.83)$$

avec  $\delta V_{np}(N, Z) = \frac{1}{4} \{ [B(N, Z) - B(N, Z-2)] - [B(N-2, Z) - B(N-2, Z-2)] \}$ ,  $B$  désignant l'énergie de liaison. La figure (3.9) ci-dessous représente précisément les valeurs de l'indicateur (3.83) pour le  $^{48}\text{Cr}$  ( $N = Z = 24$ , 4 bosons) obtenues dans le cadre de la description IBM-4( $l=0$ ) du modèle d'appariement  $SO_{ST}(8)$  avec potentiel spin-orbite. Il apparaît alors immédiatement que l'anomalie de masse est fortement influencée par la présence de corrélations superfluides à isospin nul tout en étant d'autant plus réduite que l'intensité du couplage spin-orbite est élevée.

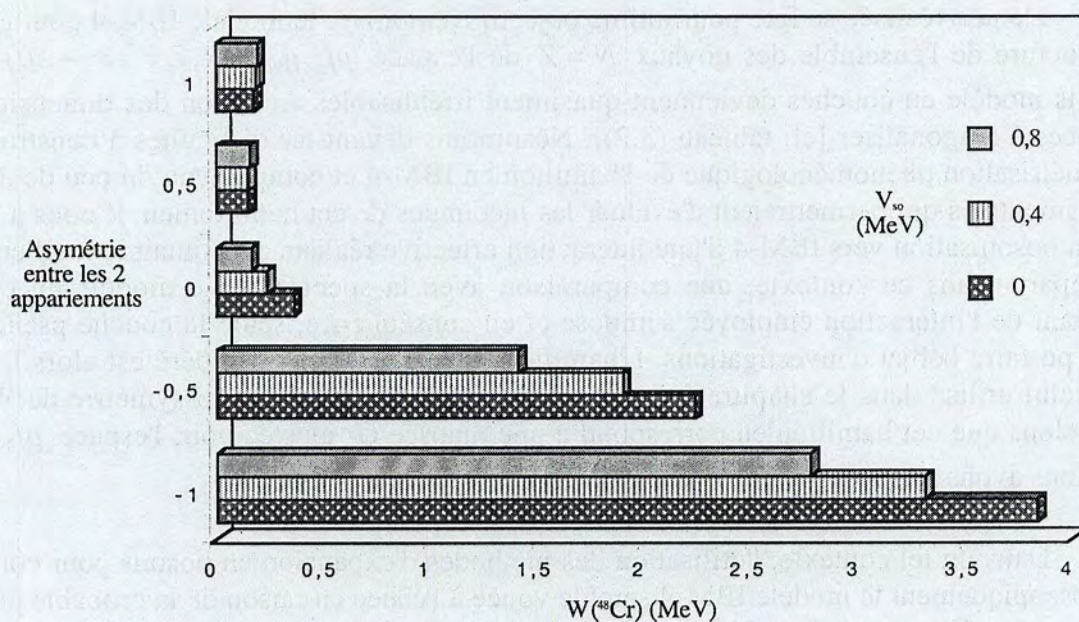


Figure (3.9) : Evolution de la singularité  $W$  du Chrome 48 avec le potentiel spin-orbite  $V_{so}$  et l'intensité relative  $x$  des appariements  $T=0$  et  $T=1$ . On rappelle que pour  $x=1$  (resp.  $x=-1$ ), l'hamiltonien ne contient qu'une interaction résiduelle d'appariement purement isovectorielle (resp. isoscalaire)

Ce résultat confirme ainsi les conclusions antérieures des références [Bre90, Sat97] tant qu'au rôle de l'interaction isoscalaire dans le développement des anomalies de masse le



long de la ligne  $N = Z$ . Il met de plus en lumière une connexion entre l'énergie de Wigner et la présence dans l'état fondamental de bosons  $s = 1, t = 0$  physiquement associés à des paires proton-neutron  $J = 1, T = 0$ . Au regard de toutes les observations effectuées dans ce paragraphe, l'influence néfaste du potentiel spin-orbite se comprend alors aisément. Précisons néanmoins que de précédentes études [Pov98] ainsi que l'interprétation en terme de signature d'une symétrie  $SU_{ST}(4)$  ou  $SU_{\tilde{ST}}(4)$  proposée au chapitre 2, mettent en évidence que l'énergie de Wigner ne provient pas uniquement de corrélations d'appariement. En conséquence, les singularités de masse des noyaux  $N = Z$  ne peuvent seulement être considérées comme une évidence expérimentale d'une superfluidité isoscalaire.

---

## IV – Un second exemple : spectroscopie des noyaux $N=Z$ au-delà du $^{56}\text{Ni}$

---

### ① Introduction

L'étude réalisée se fixe pour ultime objectif d'employer le modèle IBM-4 pour élucider la structure de l'ensemble des noyaux  $N = Z$  de l'espace  $pf_{5/2}g_{9/2}$  ( $N, Z = 28 \rightarrow 50$ ) où les calculs modèle en couches deviennent quasiment irréalisables en raison des dimensions des matrices à diagonaliser [cf. tableau (3.2)]. Néanmoins devant les difficultés à construire une paramétrisation phénoménologique de l'hamiltonien IBM-4 et compte tenu du peu de données expérimentales qui permettraient d'évaluer les inconnues de cet hamiltonien, il nous a semblé que la bosonisation vers IBM-4 d'une interaction effective réaliste constituait le meilleur point de départ. Dans ce contexte, une comparaison avec la spectroscopie modèle en couches résultant de l'interaction employée s'impose et en conséquence, seule la couche pseudo-sd a donc pu faire l'objet d'investigations. L'hamiltonien fermionique considéré est alors le même que celui utilisé dans le chapitre 2 pour tester la validité de la pseudo-symétrie de Wigner. Rappelons que cet hamiltonien correspond à une matrice  $G$  ajustée pour l'espace  $pf_{5/2}g_{9/2}$  et que nous avons renormalisée pour prendre en compte l'omission de  $g_{9/2}$ .

Dans un tel contexte, l'utilisation des méthodes d'expansion en bosons pour construire microscopiquement le modèle IBM-4 semble vouée à l'échec en raison de la probable présence de forts couplages entre les paires bosonisées et celles exclues du processus. Afin d'en avoir une nette confirmation, nous avons comparé sur la figure (3.10) ci-dessous le spectre du  $^{62}\text{Ga}$  ( $N = Z = 31$ ) dans l'espace pseudo-sd et dans une description IBM-4 après utilisation de l'expansion de Dyson tronquée aux bosons  $(J, T) = (0, 1), (2, 1), (1, 0)^2, (2, 0), (3, 0)$  de plus basse énergie. A noter qu'afin de ne pas amplifier les couplages avec les états spurieux, aucune hermitisation n'a été effectuée. Le résultat IBM-4, loin d'être acceptable, atteste ainsi de l'impossibilité d'utiliser un développement en bosons de l'hamiltonien fermionique en dehors d'un découplage quasi-parfait du sous-espace bosonisé. Pour les calculs réalistes que nous souhaitons effectuer, seule la construction explicite dans l'espace modèle en couches des états



à plusieurs bosons, suivie d'un processus d'orthonormalisation approprié, semble donc en mesure d'assurer la transcription en IBM-4 de l'interaction effective considérée. Les résultats obtenus par ce genre d'approche, dont un exposé général a été présenté auparavant (cf. II-3), vont faire l'objet des 2 paragraphes suivants. Nous espérons que par la suite une analyse du type de celle réalisée par Dufour et Zuker [Duf96] permettra de mettre en exergue les principaux termes qui composent les hamiltoniens IBM-4 calculés, de manière à pouvoir proposer une forme phénoménologique utilisable en dehors de l'espace pseudo-sd.

Précisons enfin que tous les spectres présentés dans ce paragraphe et les suivants ont été effectués avec le code ANTOINE [Cau90] pour la partie modèle en couches et avec l'algorithme décrit au paragraphe I-3 pour la description IBM-4. Le processus de bosonisation lui-même a par ailleurs été mené numériquement grâce à un nouveau code informatique dont l'écriture a constitué un élément essentiel de ce travail de thèse.

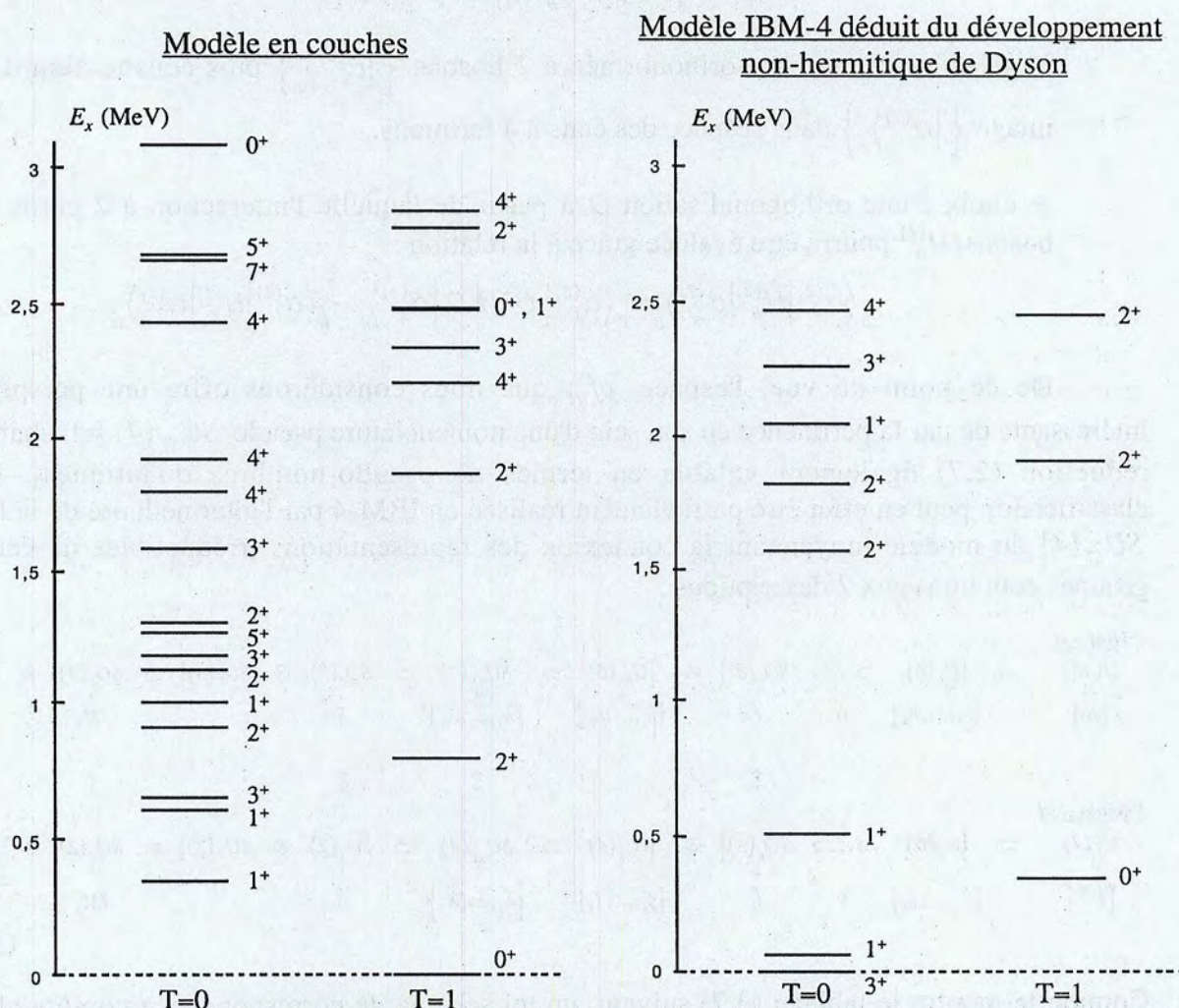


Figure (3.10) : Spectroscopie du Gallium 62 dans le cadre du modèle en couches (espace pseudo-sd) et dans une description IBM-4 obtenue par expansion skélétonisée de Dyson (Toutes les valeurs propres obtenues dans ce cas sont purement réelles).



## ② Aspects formels des calculs IBM-4 dans la couche pseudo-*sd*

Commençons par reprendre certains éléments du paragraphe II-3 concernant les étapes à suivre pour déterminer les termes à 1 et 2 corps de la transcription en bosons  $H_B$  d'un hamiltonien  $H$  par la méthode de connexion des états :

➤ définition microscopique des états à 1 boson  $|\alpha^{(1)}\rangle_B$  en leur associant des paires collectives orthonormées  $|\alpha^{(1)}\rangle_F$ .

➤ calcul de l'hamiltonien en bosons à 1 corps  $H_B^{(1)}$  via :

$${}_B \langle \alpha_1^{(1)} | H_B^{(1)} | \alpha_2^{(1)} \rangle_B = {}_F \langle \alpha_1^{(1)} | H | \alpha_2^{(1)} \rangle_F$$

➤ sélection d'une base orthonormée à 2 bosons  $\{|\alpha^{(2)}\rangle_B\}$  puis construction de son image  $\{|\alpha^{(2)}\rangle_F\}$  dans l'espace des états à 4 fermions.

➤ choix d'une orthogonalisation  $O$  à partir de laquelle l'interaction à 2 corps entre bosons  $H_B^{(2)}$  pourra être évaluée grâce à la relation :

$${}_B \langle \alpha_1^{(2)} | H_B^{(2)} | \alpha_2^{(2)} \rangle_B = {}_F \langle \alpha_1^{(2)} | O^+ H O | \alpha_2^{(2)} \rangle_F - {}_B \langle \alpha_1^{(2)} | H_B^{(1)} | \alpha_2^{(2)} \rangle_B$$

De ce point de vue, l'espace  $pf_{5/2}$  que nous considérons offre une perspective intéressante de par la pertinence en son sein d'une nomenclature pseudo  $SU_{ST}(4)$  [cf. chaîne de réduction (2.7) également valable en termes de pseudo-nombres quantiques]. Cette classification peut en effet être partiellement réalisée en IBM-4 par l'intermédiaire de la limite  $SU_{ST}(4)$  du modèle moyennant la connexion des représentations irréductibles de certains groupes communs aux 2 descriptions :

<u>IBM-4</u>	$\supset$	$[U_L(6)$	$\supset \dots \supset$	$SO_L(3)]$	$\otimes$	$[U_{ST}(6)$	$\supset$	$SU_{ST}(4)$	$\supset$	$SO_S(3)$	$\otimes$	$SO_T(3)]$	$\supset$	$SO_L(3)$	$\otimes$	$SO_T(3)$
$[N]$		$[h_1, \dots, h_6]$	$\eta$	$L$		$[h_1, \dots, h_6]$		$[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$		$S$		$JM_J$		$JM_J$		$TM_T$
				$\updownarrow$				$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
<u>Pseudo-sd</u>	$\supset$	$[U_L(6)$	$\supset \dots \supset$	$SO_L(3)]$	$\otimes$	$[U_{ST}(4)$	$\supset$	$SU_{ST}(4)$	$\supset$	$SU_S(2)$	$\otimes$	$SU_T(2)]$	$\supset$	$SU_L(2)$	$\otimes$	$SU_T(2)$
$[I^{2N}]$		$[\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_6]$	$\nu$	$\tilde{L}$		$[f_1, \dots, f_4]$		$[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3]$		$\tilde{S}$		$JM_J$		$JM_J$		$TM_T$

(3.84)

Comme le montre le tableau (3.7) suivant, un tel schéma de correspondance confère alors à l'approche IBM-4 dans l'espace  $pf_{5/2}$  une interprétation en terme de troncation du modèle en couches aux pseudo-supermultiplets énergétiquement favorisés dans chaque canal d'isospin. En préservant de plus les labels  $[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3], \tilde{L}, \tilde{S}, JM_J, TM_T$  dont nous savons qu'ils



caractérisent avec une bonne approximation les états de basse énergie des noyaux situés juste au-delà du  $^{56}\text{Ni}$ , l'algorithme de bosonisation (3.84) trouve ainsi toute sa légitimité.

Nombre de bosons	RI de $U_L(6)$	Moment orbital $L$	RI de $SU_{ST}(4)$	Spin / isospin $(S, T)$
1	[1]	$0(s), 2(d)$	[1, 1]	$(0, 1), (1, 0)$
2	[2]	$0(s^2, d^2), 2(sd, d^2), 4(d^2)$	[0]	$(0, 0)$
			[2, 2]	$(0, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0)$
	[1, 1]	$1(d^2), 2(sd), 3(d^2)$	[2, 1, 1]	$(0, 1), (1, 0), (1, 1)$

Nombre de nucléons	RI de $U_L(6)$	Pseudo moment orbital $\tilde{L}$	RI de $SU_{\tilde{S}T}(4)$	Pseudo-spin / Isospin $(\tilde{S}, T)$
2	[2]	$0(\tilde{s}^2, \tilde{d}^2), 2(\tilde{s}\tilde{d}, \tilde{d}^2), 4(\tilde{d}^2)$	[1, 1]	$(0, 1), (1, 0)$
	[1, 1]	$1(\tilde{d}^2), 2(\tilde{s}\tilde{d}), 3(\tilde{d}^2)$	[2]	$(0, 0), (1, 1)$
4	[4]	$0^4, 2^5, 3, 4^4, 5, 6^2, 8$	[0]	$(0, 0)$
	[3, 1]	$0^2, 1^4, 2^7, 3^6, 4^5, 5^3, 6^2, 7$	[2, 1, 1]	$(0, 1), (1, 0), (1, 1)$
	[2, 2]	$0^3, 1, 2^5, 3^2, 4^4, 5, 6$	[2, 2]	$(0, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0)$
	[2, 1, 1]	$1^5, 2^3, 3^5, 4^2, 5^2$	[3, 1]	$(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1)$
	[1, 1, 1, 1]	$1, 2, 3$	[4]	$(0, 0), (1, 1), (2, 2)$

**Tableau (3.7) :** Comparaison entre la limite  $SU_{ST}(4)$  de IBM-4 et la classification  $SU_{ST}(4)$  de l'espace  $pf_{7/2}$  pour 1 et 2 bosons. Dans le cas du modèle en couches, les RI de  $SU_{ST}(4)$  sont rangées par énergie croissante et celles communes avec IBM-4 ont été grisées.



Concrètement, la méthode retenue consiste donc à associer chacun des bosons IBM-4  $b_{(l,s)jm_i,tm_i}^+$  avec une paire collective de nucléons couplés à la représentation antisymétrique  $[\tilde{l}, \tilde{l}]$  de  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  ainsi qu'à un pseudo-moment orbital  $\tilde{l}$ , un pseudo-spin  $\tilde{s}$ , un moment cinétique total  $j$  et un isospin  $t$ , soit :

$$|(l,s)jm_j,tm_t\rangle_B \leftrightarrow |(l,s)jm_j,tm_t\rangle_F = A_{(\tilde{l},\tilde{s})jm_j,tm_t}^+ | \rangle_F = \sum_{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2} X_{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2}^{(\tilde{l},\tilde{s})jm_j,tm_t} \left[ a_{\tilde{\rho}_1}^+ \otimes a_{\tilde{\rho}_2}^+ \right]_{jm_j,tm_t}^{[\tilde{l},\tilde{s}]j,t} \quad (3.85)$$

où  $\tilde{\rho}$  désigne de façon générale une pseudo-orbite. Les amplitudes  $X_{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2}^{(\tilde{l},\tilde{s})jm_j,tm_t}$  sont par ailleurs évaluées grâce à un processus d'optimisation qui vise à reproduire au mieux les états propres réalistes du  $^{58}\text{Cu}$  (système à 1 boson) par un hamiltonien exhibant une invariance dynamique sous les transformations de  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  et que nous avons choisi sous sa forme la plus simple, c'est-à-dire une combinaison linéaire de tous les invariants de Casimir associés à cette limite [cf. schéma de classification (2.7)]. Dès lors l'image fermionique des états à 2 bosons de la limite  $SU_{\tilde{S}T}(4)$ , labellés par  $[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] (l_1, l_2) LS, JM_J, TM_T]_B$  conformément au tableau (3.7), s'obtient assez facilement puisqu'en effet :

$$[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] (l_1, l_2) LS, JM_J, TM_T]_F = \sum_{\substack{s_1, j_1, t_1, s_2, j_2, t_2 \\ m_{j_1} + m_{j_2} = M_J \\ m_{t_1} + m_{t_2} = M_T}} \left\langle \begin{matrix} (\tilde{l}_1, \tilde{s}_1), j_1 m_{j_1}, t_1 m_{t_1} \\ (\tilde{l}_2, \tilde{s}_2), j_2 m_{j_2}, t_2 m_{t_2} \end{matrix} \middle| [\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3] \tilde{L} \tilde{S}, JM_J, TM_T \right\rangle \dots \quad (3.86)$$

$$A_{(\tilde{l}_1, \tilde{s}_1)j_1 m_{j_1}, t_1 m_{t_1}}^+ A_{(\tilde{l}_2, \tilde{s}_2)j_2 m_{j_2}, t_2 m_{t_2}}^+ | \rangle_F$$

où les coefficients  $\left\langle \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \end{matrix} \middle| \cdot \right\rangle$  assurent le couplage aux nombres quantiques  $[\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3], \tilde{L}, \tilde{S}, JM_J, TM_T$  dans la base non-orthonormée des états à 2 paires  $A_{(\tilde{l}_1, \tilde{s}_1)j_1 m_{j_1}, t_1 m_{t_1}}^+ A_{(\tilde{l}_2, \tilde{s}_2)j_2 m_{j_2}, t_2 m_{t_2}}^+ | \rangle_F$  ( $l_1, l_2$  fixes) si bien qu'on peut les calculer numériquement par diagonalisation d'une combinaison linéaire quelconque des opérateurs  $C_2[SU_{\tilde{S}T}(4)], \tilde{L}^2, \tilde{S}^2, J^2$  et  $T^2$  dans cette même base. Signalons toutefois qu'en procédant ainsi les états (3.86) acquièrent des phases aléatoires qui vont entraîner un arbitraire dans le signe des éléments de matrice hors diagonaux de l'interaction à 2 corps entre bosons. Sans précaution particulière, les conséquences de cette indétermination peuvent alors s'avérer catastrophiques sur la spectroscopie IBM-4 des systèmes à plus de 2 bosons. Afin d'y remédier, nous avons choisi de fixer la phase de chaque vecteur (3.86) de manière à ce que la composante sur l'un quelconque des vecteurs découplés  $A_{(\tilde{l}_1, \tilde{s}_1)j_1 m_{j_1}, t_1 m_{t_1}}^+ A_{(\tilde{l}_2, \tilde{s}_2)j_2 m_{j_2}, t_2 m_{t_2}}^+ | \rangle_F$  ait le même signe qu'en IBM-4 où l'on peut en effet écrire :

$$[[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] (l_1, l_2) LS, JM_J, TM_T]_B = \sum_{s_1, t_1, s_2, t_2} \left\langle \begin{matrix} [l_1, l_1] & [l_1, l_1] \\ s_1, t_1 & s_2, t_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \\ S, T \end{matrix} \right\rangle |(l_1 s_1 t_1, l_2 s_2 t_2) LS, JM_J, TM_T]_B,$$



soit :

$$\begin{aligned}
 \left| [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] (l_1, l_2) LS, JM_J, TM_T \right\rangle_B = & \sum_{\substack{s_1, j_1, t_1, s_2, j_2, t_2 \\ m_{j_1} + m_{j_2} = M_J \\ m_{t_1} + m_{t_2} = M_T}} \frac{I}{\sqrt{I + \delta_{(l_1 s_1 t_1), (l_2 s_2 t_2)}}} \left\langle \begin{array}{cc} [I, I] & [I, I] \\ s_1, t_1 & s_2, t_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \\ S, T \end{array} \right\rangle \dots \\
 & \left\{ \begin{array}{ccc} l_1 & l_2 & L \\ s_1 & s_2 & S \\ j_1 & j_2 & J \end{array} \right\} \sqrt{(2L+1)(2S+1)(2j_1+1)(2j_2+1)} \dots \\
 & \left\langle j_1 m_{j_1} j_2 m_{j_2} \middle| JM_J \right\rangle \left\langle t_1 m_{t_1} t_2 m_{t_2} \middle| TM_T \right\rangle b_{(l_1, s_1) j_1 m_{j_1}, t_1 m_{t_1}}^+ b_{(l_2, s_2) j_2 m_{j_2}, t_2 m_{t_2}}^+ \left| \right\rangle_B
 \end{aligned} \tag{3.87}$$

$\left\langle \begin{array}{cc} [I, I] & [I, I] \\ s_1, t_1 & s_2, t_2 \end{array} \middle| \begin{array}{c} [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] \\ S, T \end{array} \right\rangle$  désignant les facteurs isoscalaires de la réduction spin-isospin  $SU_{ST}(4) \supset SO_S(3) \otimes SO_T(3)$  calculés par Hecht & Pang [Hec69].

Pour achever la description du processus de bosonisation, il ne reste plus qu'à clarifier la manière dont on orthogonalise les états (3.86). Rappelons que cette étape joue en réalité un rôle majeur puisqu'elle contrôle la possibilité de se limiter aux termes à 2 corps dans l'hamiltonien bosonique. Dans le cas présent, le schéma de correspondance (3.84) assure en fait déjà l'orthogonalité des vecteurs à 2 paires appartenant à des sous-espaces  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] LS, JM_J, TM_T$  différents et en conséquence seuls les états  $|s^2\rangle_F$ ,  $|sd\rangle_F$ ,  $|d^2\rangle_F$  de chacun de ces sous-espaces doivent être orthogonalisés. Comme précisé au paragraphe II-3, on peut alors utiliser la méthode démocratique faisant appel au tenseur métrique de la famille d'états considérés ou la procédure OAI consistant au contraire à effectuer une hiérarchisation par nombre décroissant de bosons  $s$ . Une comparaison entre les 2 algorithmes est précisément présentée sur la figure (3.11) ci-après dans le cas du  $^{62}\text{Ga}$  ( $N=Z=31$ , 3 bosons). On constate immédiatement que moyennant les choix effectués, seule l'approche OAI est en mesure de fournir une spectroscopie acceptable vis-à-vis du modèle en couches. Ce résultat illustre ainsi l'importance de l'opérateur d'orthogonalisation dans la construction d'une interaction à 2 corps entre bosons capable d'encoder l'ensemble de l'hamiltonien fermionique pour pouvoir convenablement décrire des systèmes à nombre plus élevé de particules. Il est cependant regrettable qu'à ce jour, on ne sache pas déterminer le mécanisme d'orthogonalisation le mieux adapté à l'interaction nucléaire effective utilisée. Précisons encore que même si le spectre IBM-4 / OAI du  $^{62}\text{Ga}$  est globalement satisfaisant, il présente tout de même une certaine dilatation par rapport à celui du modèle en couches. Un phénomène similaire à en réalité déjà été constaté dans des calculs similaires pour IBM-2 où l'on a pu l'interpréter comme résultant de la troncation effectuée [Yos96]. Pour y remédier, il faut alors faire appel à des processus de renormalisation de l'hamiltonien visant à prendre en compte l'effet des degrés de liberté bi-fermioniques non bosonisés. Devant la difficulté de telles techniques qui finissent par faire perdre tout avantage à la modélisation IBM, nous avons opté pour une méthode simple consistant à multiplier l'hamiltonien par une constante déterminée de façon à ajuster la position du premier niveau  $2^+$  dans le  $^{60}\text{Zn}$  (système à 2 bosons). Logiquement, ce facteur d'échelle n'est donc appliqué que dans les calculs à au moins 2 bosons.



### Modèle en couches

### IBM-4 / OAI

### IBM-4 / Démocratique

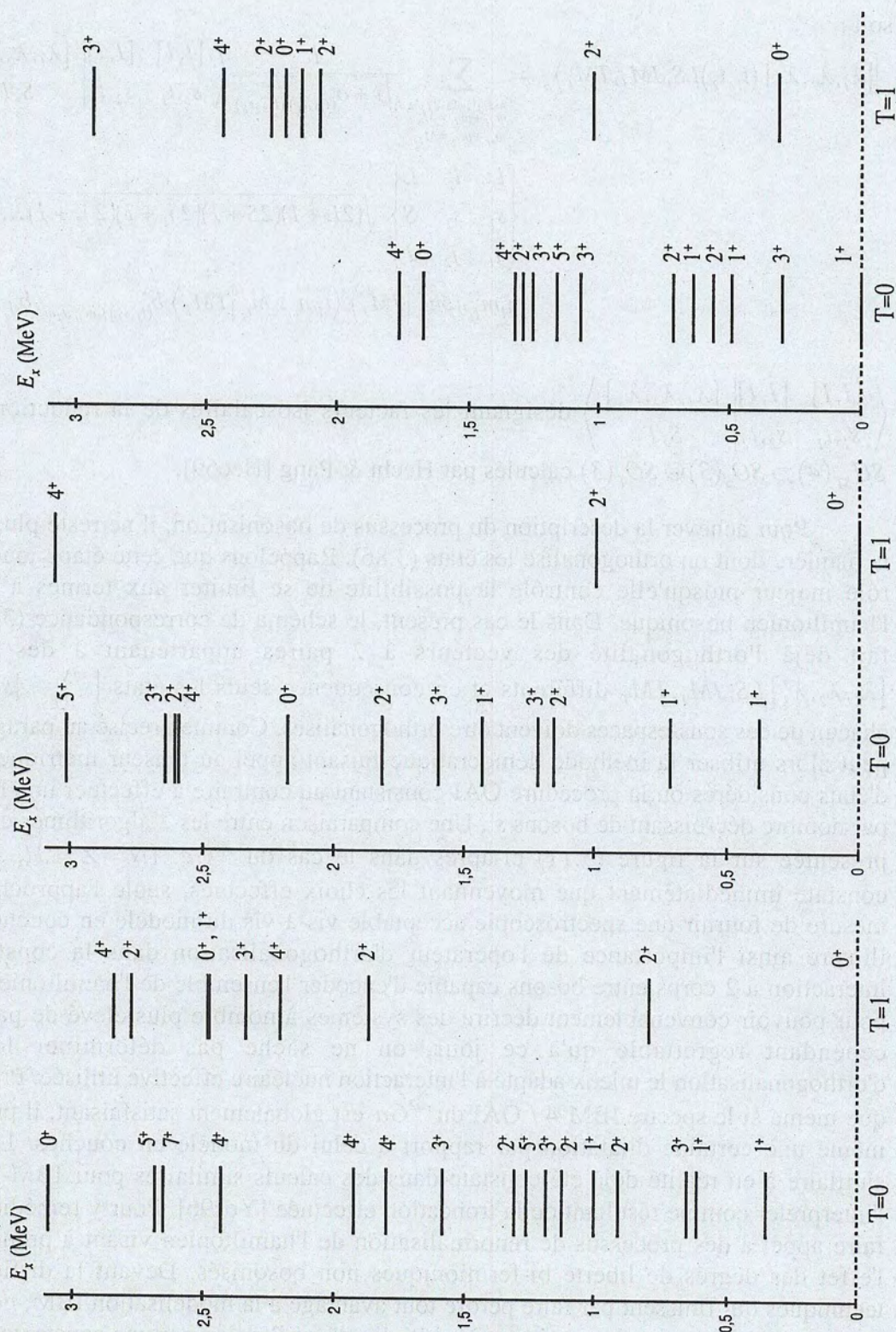


Figure (3.11) : Comparaison entre le spectre  $pf_{5/2}$  du Gallium 62 et ceux obtenus dans l'approche IBM-4 selon le type d'orthogonalisation effectué.



### ③ Résultats

Une comparaison entre les niveaux expérimentaux, ceux issus de la description modèle en couches dans l'espace pseudo-sd et ceux résultants de la diagonalisation de l'hamiltonien IBM-4 construit microscopiquement dans le paragraphe précédent, est montrée pour un certain nombre de noyaux  $N = Z$  au-delà du  $^{56}\text{Ni}$  sur les figures des pages 121 à 127. (Seuls les 3 premiers niveaux de chaque sous-espace  $(J, T)$  sont représentés et la quatrième colonne appelée IBM-4\* sera présentée par la suite). Précisons au sujet des calculs en bosons que le coefficient de renormalisation utilisé à partir du  $^{60}\text{Zn}$  est égal à 0.82. A l'examen des spectres présentés, on constate de façon générale un bon accord entre le modèle en couches dans l'espace  $pf_{5/2}$  et les données expérimentales. Tant qu'à la description IBM-4, les résultats sont plus nuancés et sont globalement de meilleure qualité pour les systèmes impair-impair malgré une constante détérioration au fur à mesure que le nombre de bosons augmente. Signalons que l'absence du premier état  $3^+$  isoscalaire dans le Cuivre 58 se justifie par l'algorithme de bosonisation (3.84). En effet, en associant le moment orbital  $l$  des bosons au pseudo nombre quantique  $\tilde{L}$  d'une paire de nucléons, cet état est absent du traitement IBM-4 actuel puisque son analyse montre qu'il présente majoritairement un caractère  $\tilde{L} = 4$ . Etant situé à basse énergie, on peut penser que son omission est en particulier responsable des divergences observées entre les descriptions fermionique et bosonique.

Dans ce contexte, une solution possible consiste à étendre l'approche par la prise en compte de bosons hexadécapolaires (bosons  $g$ ) précisément décrits par les couples  $(l, s, t) = (4, 0, 1)$ ,  $(4, 1, 0)$  de manière à préserver l'existence d'une limite  $SU_{ST}(4)$  permettant d'effectuer une bosonisation analogue à (3.84). Tout le processus de transcription en bosons de l'interaction effective est ainsi similaire à celui décrit auparavant si ce n'est que la classification pseudo- $SU_{ST}(4)$  de l'espace  $pf_{5/2}$  est maintenant mise en correspondance avec la chaîne de réduction suivante en IBM :

$$U(90) \supset [U_L(15) \supset \dots \supset SO_L(3)] \otimes [U_{ST}(6) \supset SU_{ST}(4) \supset SO_S(3) \otimes SO_T(3)] \supset SO_J(3) \otimes SO_T(3) \quad (3.88)$$

En outre, l'orthogonalisation OAI des états à 2 paires  $|s^2\rangle_F, |sd\rangle_F, |sg\rangle_F, |d^2\rangle_F, |g^2\rangle_F, |dg\rangle_F$  de chaque sous-espace  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] LS, JM_J, TM_T$  est compliquée par l'existence de plusieurs vecteurs ayant le même nombre  $n_s$  de bosons  $l=0$ . La méthode retenue consiste alors tout d'abord à orthogonaliser ces kets par rapport aux états caractérisés par une plus grande valeur de  $n_s$  conformément à l'algorithme OAI. Dans une seconde étape, les vecteurs en question sont finalement rendus orthonormés entre eux grâce à l'emploi de leur matrice de recouvrement, comme illustré schématiquement sur la figure (3.12) ci-après.

Dans la pratique, la diagonalisation de l'hamiltonien en bosons est néanmoins quasiment impossible à réaliser lorsque tous les degrés de liberté  $l=4$  sont ajoutés à IBM-4. Par ailleurs, en supposant qu'on parvienne tout de même à calculer cette spectroscopie, de nombreux états spurieux se manifesteraient : par exemple, la dimension du sous-espace



$(M_j, M_T) = (0, 0)$  pour le Gallium 62 est de 3807 dans l'espace pseudo-sd alors qu'elle passe à 5066 dans l'algèbre de bosons  $U(90)$ . Si de plus, on se souvient que l'introduction des bosons  $g$  était initialement motivée par la seule prise en compte en IBM-4 du premier état  $(J, T) = (3, 0)$  du Cuivre 58, il est légitime d'envisager une troncation de l'hamiltonien étendu aux bosons  $(l, s, j, t) = (0, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (2, 0, 2, 1), (2, 1, 1, 0), (2, 1, 2, 0), (4, 1, 3, 0)$  représentant les paires collectives proton-neutron énergétiquement favorisées et caractérisées par un couple (moment cinétique, isospin) compatible avec l'approche IBM-4. A ce stade, il est important d'insister sur le fait que le modèle ainsi construit correspond toujours à IBM-4 en raison de la définition arbitraire du moment cinétique orbital et du spin des bosons. L'énumération précédente confère en fait à  $l$  et  $s$  une signification physique en terme de pseudo moment orbital et de spin d'un état à 2 fermions, alors que dans la vision IBM-4, il est nécessaire d'associer l'état individuel  $(j = 3, t = 0)$  à un boson  $d$ . En conséquence,  $l$  devient alors simplement un label effectif sans véritable définition microscopique et qui n'acquiert de sens que dans la description IBM. C'est précisément à cette approche que nous avons donné le nom d'IBM-4\* dans les spectres suivants et ce afin d'introduire une distinction avec les précédents calculs où les valeurs  $l = 0, 2$  du modèle étaient exactement rattachées au nombre quantique  $\tilde{L}$ . Signalons que le facteur d'échelle appliqué en IBM-4\* dès  $^{60}\text{Zn}$  est de 0.61.

L'observation des niveaux d'énergie des différents systèmes  $N = Z$  considérés permet immédiatement de constater une plus nette adéquation avec le modèle en couches. En particulier, l'accord pour le Gallium 62 est remarquable compte tenu de l'absence de dépendance de l'hamiltonien vis-à-vis du nombre  $\mathcal{N}$  de bosons. De même que pour les spectres IBM-4 standard, des divergences apparaissent néanmoins lorsqu'on s'éloigne de la région où la bosonisation a été effectuée avec une description plus pauvre pour les noyaux pair-pair. Il est clair que pour ces noyaux, les résultats obtenus n'atteignent pas la qualité de ceux d'Elliott & al en IBM-3 [Ell96]. Leur calcul est cependant basé sur une forte dépendance en  $\mathcal{N}$  que nous n'avons pas considérée et que l'introduction des bosons isoscalaires ne parvient visiblement pas à éliminer.

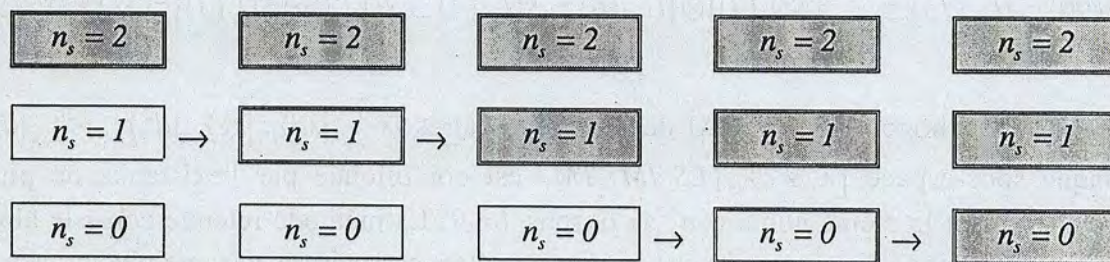
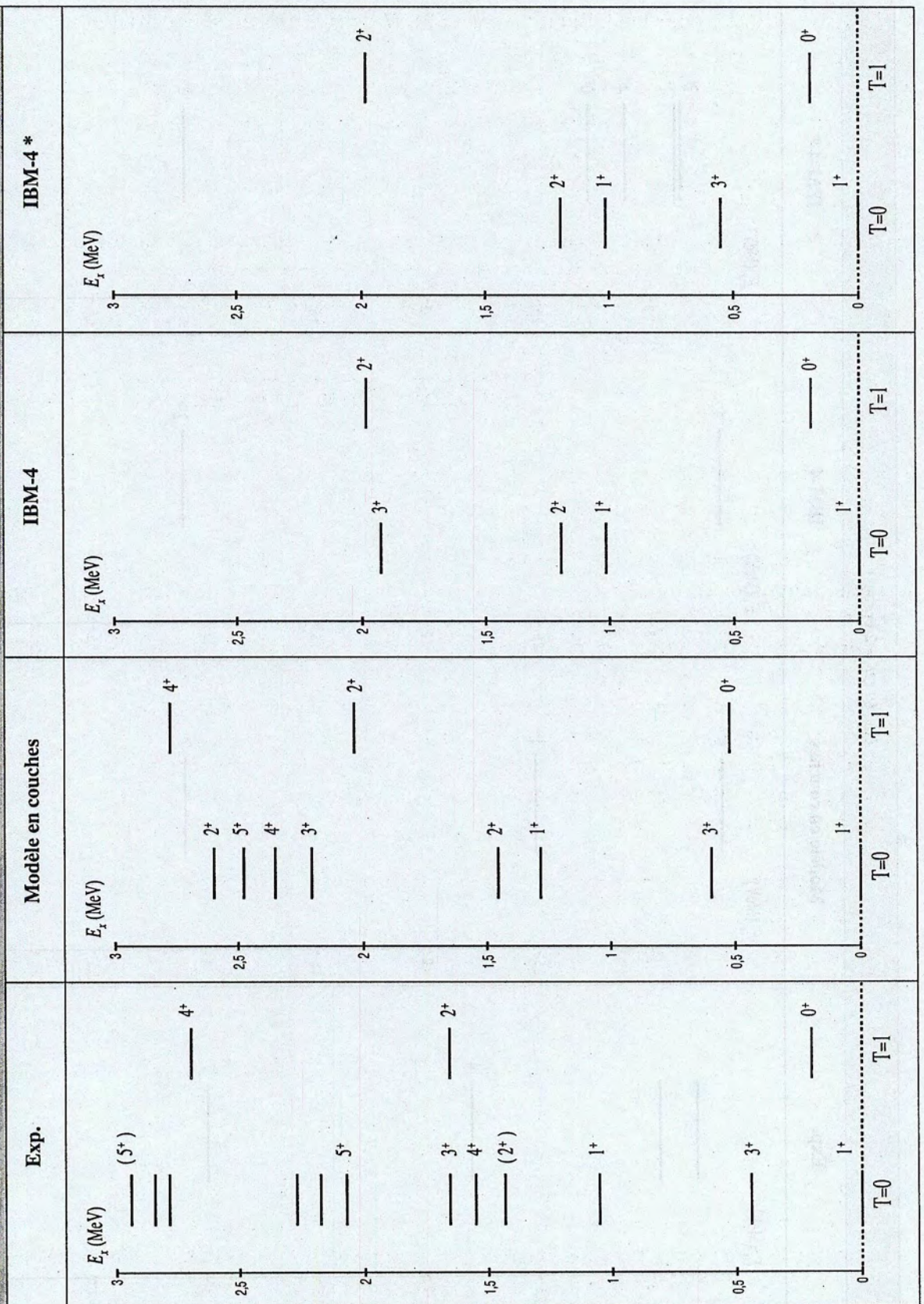


Figure (3.12) : Mécanisme d'orthogonalisation des images fermioniques des états  $SU_{ST}(4)$  à 2 bosons dans le cas de l'approche IBM-4 étendue aux bosons  $g$ . Les vecteurs de chaque espace  $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] LS, JM_j, TM_T$  sont simplement caractérisés par leur nombre  $n_s$  de bosons  $l = 0$ . Le passage  $\longrightarrow$  = d'un sous-espace  $n_s$  sous-entend une orthogonalisation des kets par rapport aux états comportant un plus grand nombre de bosons  $s$ . Enfin, le passage en gris signifie une orthogonalisation démocratique des vecteurs du sous-espace.

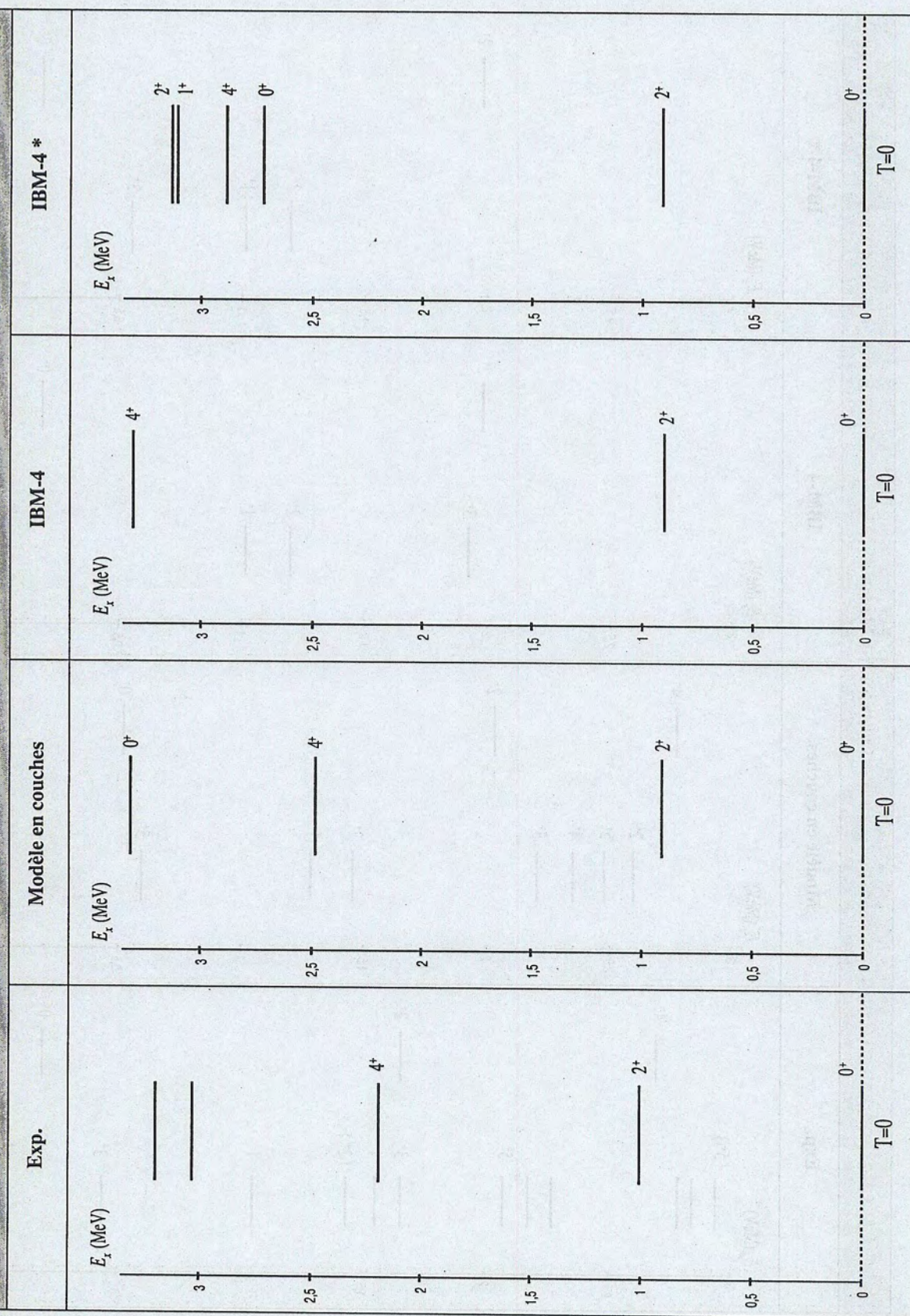


Cuivre 58 ( $\gamma = 1$  boson)

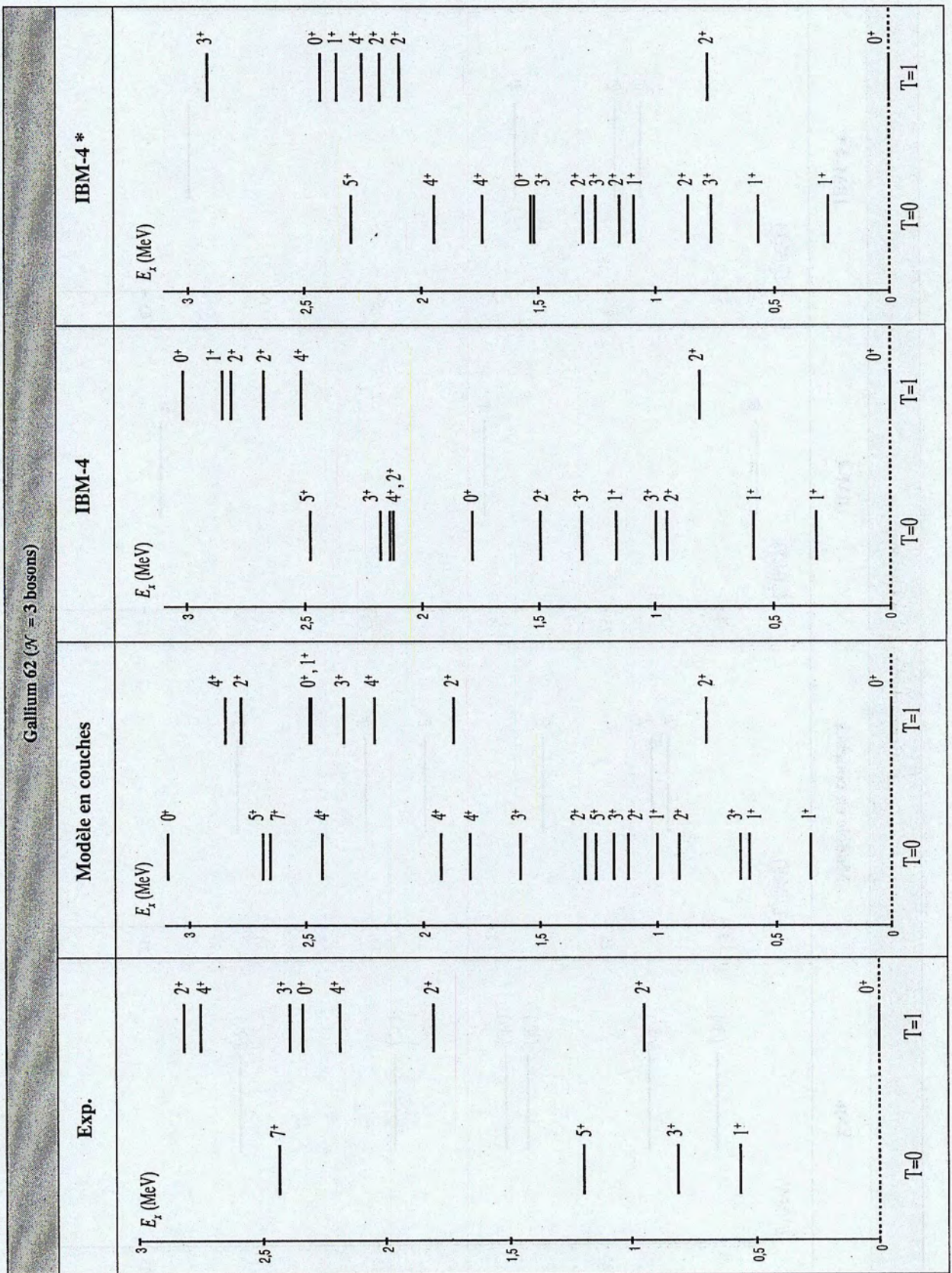




Zinc 60 ( $\gamma = 2$  bosons)

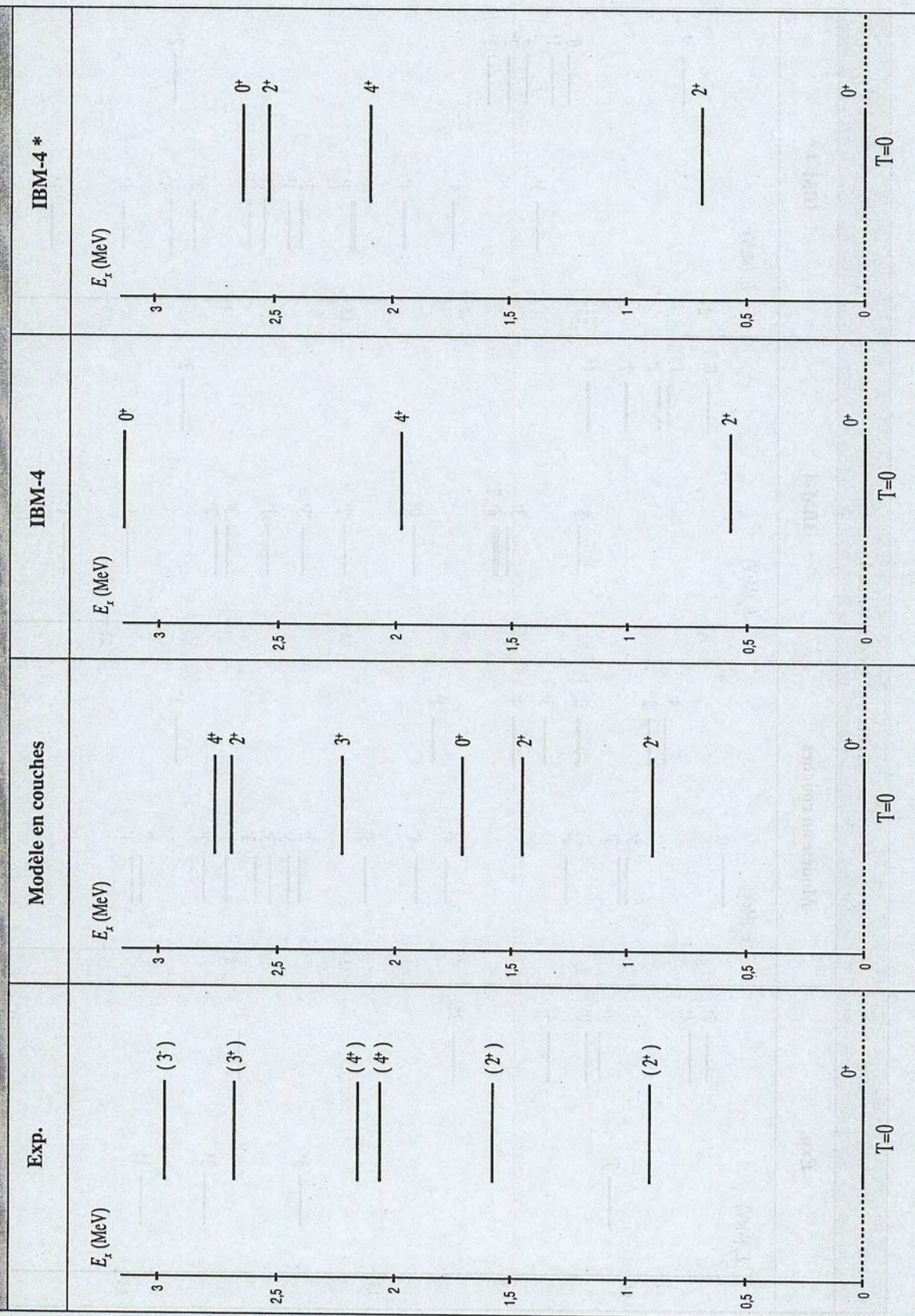




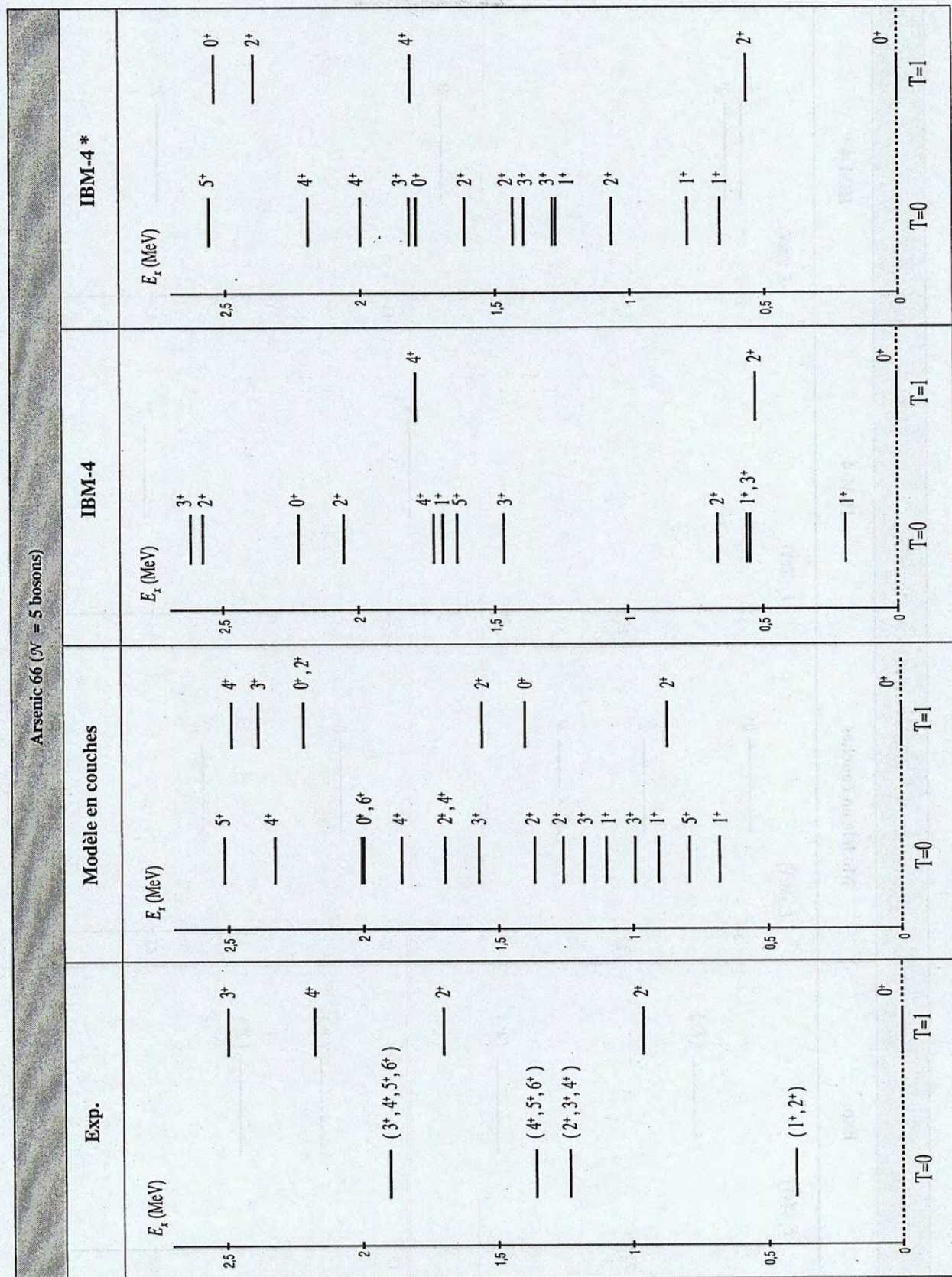




Germanium 64 ( $N = 4$  bosons)

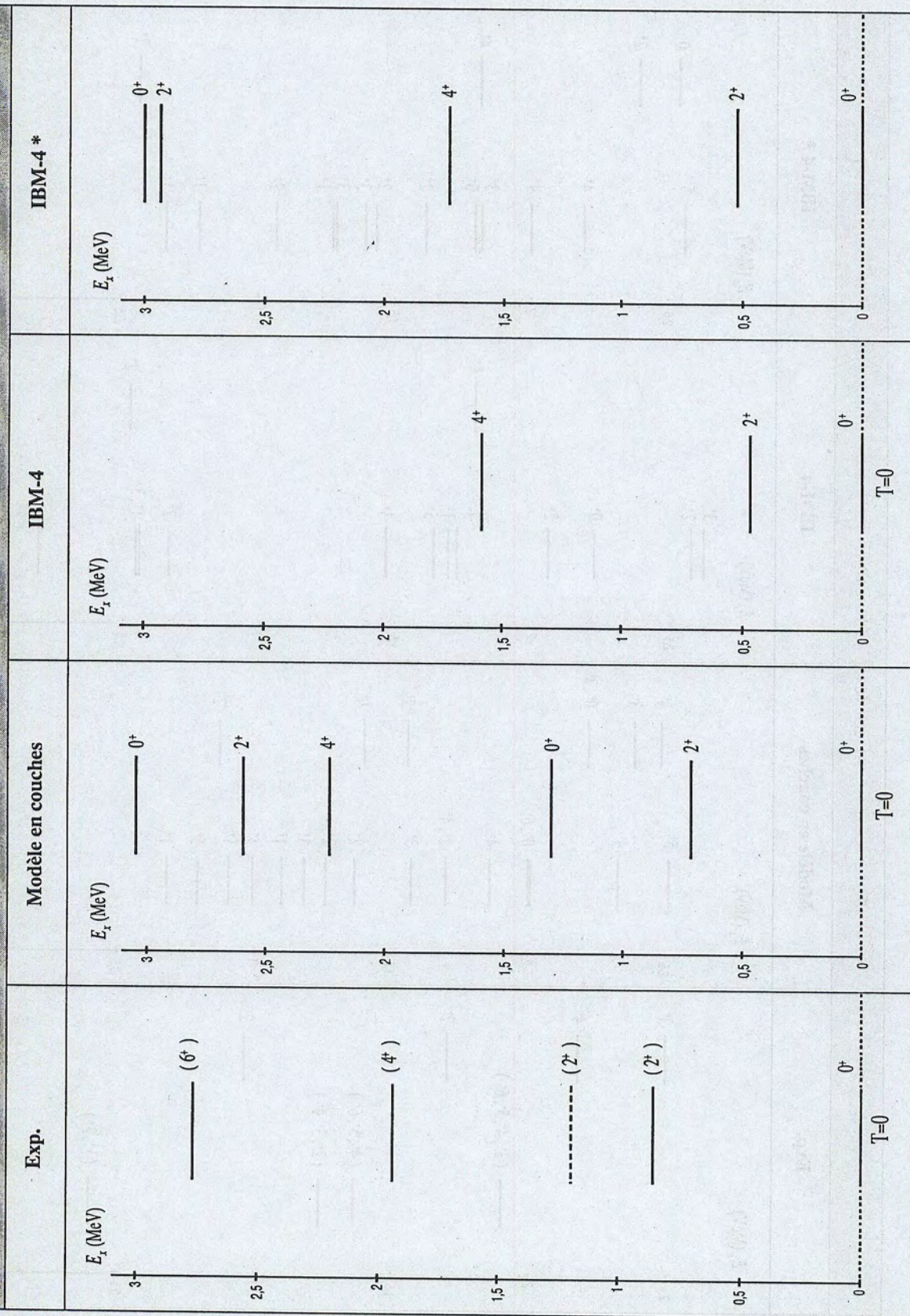




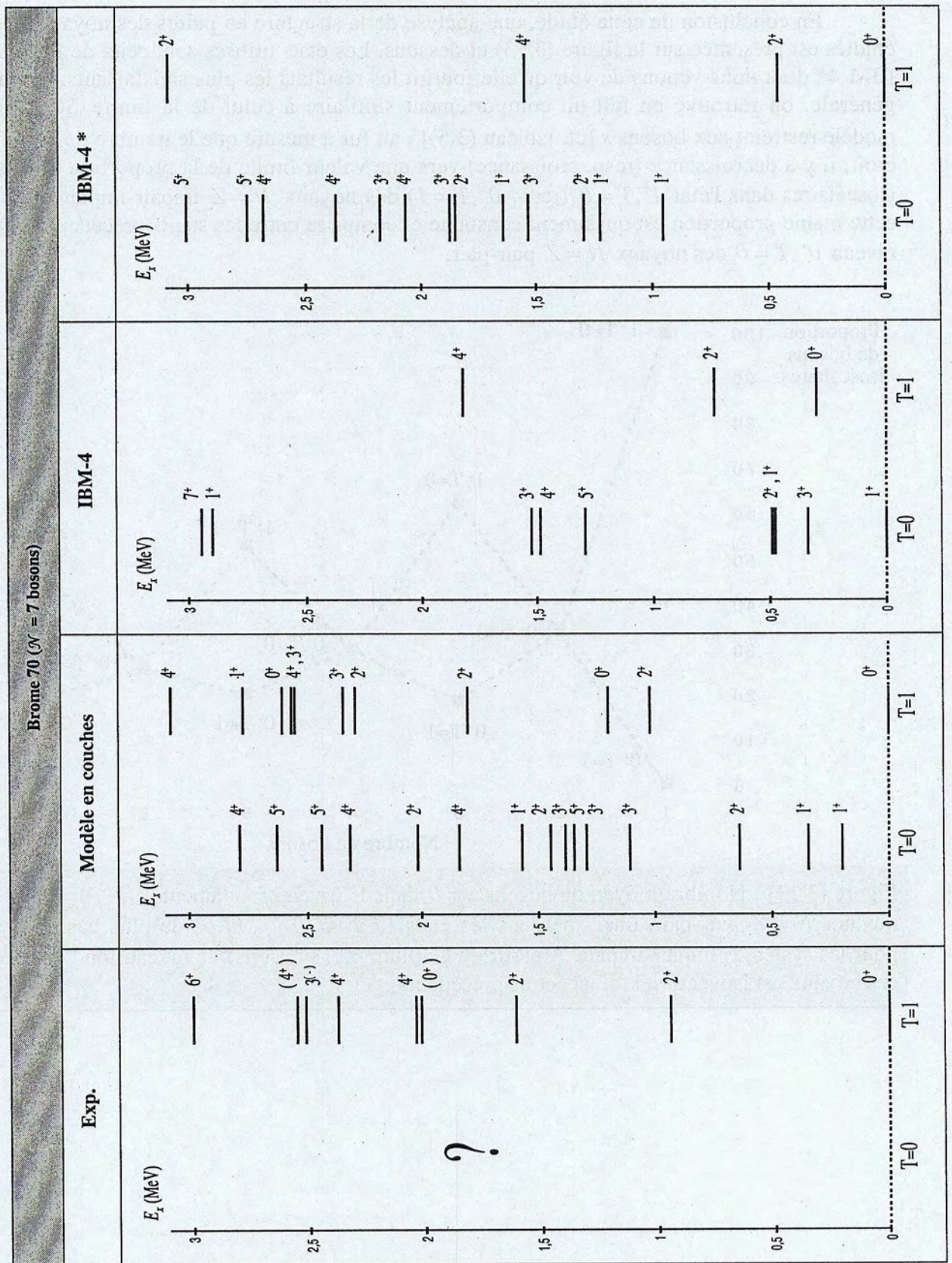




Selenium 68 ( $\gamma = 6$  bosons)









En conclusion de cette étude, une analyse de la structure en paires des noyaux  $N = Z$  étudiés est présentée sur la figure (3.13) ci-dessous. Les états utilisés sont ceux de l'approche IBM-4\* dont nous venons de voir qu'elle fournit les résultats les plus satisfaisants. De façon générale, on retrouve en fait un comportement similaire à celui de la limite  $SU_{ST}(4)$  du modèle restreint aux bosons  $s$  [cf. tableau (3.5)] : au fur à mesure que le nombre de particules croît, il y a décroissance (resp. croissance) vers une valeur limite de la proportion de bosons isoscalaires dans l'état  $1^+, T=0$  (resp.  $0^+, T=1$ ) des noyaux  $N = Z$  impair-impair alors que cette même proportion est quasiment constante et comprise entre les seuils précédents dans le niveau  $0^+, T=0$  des noyaux  $N = Z$  pair-pair.

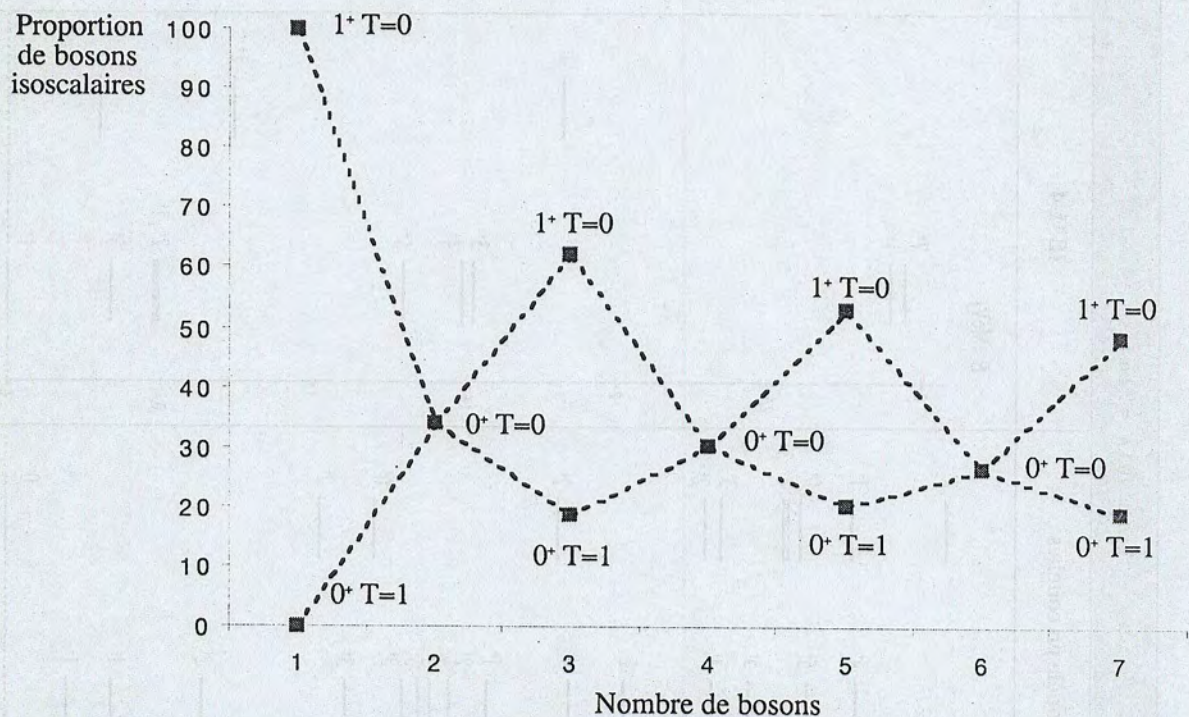


Figure (3.13) : Nombre moyen de bosons  $t=0$  dans le niveau fondamental  $(J,T)=(0,0)$  des noyaux  $N = Z$  pair-pair ainsi que dans les états  $(J,T)=(0,1)$ ,  $(1,0)$  de plus basse énergie pour les systèmes impair-impair. A partir du Gallium 62 (3 bosons), le niveau fondamental de ces noyaux est isovectoriel (cf. spectres précédents).



## Références

- [Bel62] Belyaev S T, Zelevinskii V G  
*Nucl. Phys.* – 39/582 (1962)
- [Bre90] Brenner D S, Wesselborg C, Casten R F, Warner D D, Zhang J Y  
*Phys. Lett. B* – 243/1 (1990)
- [Bro84] Brown B A, Etchegoyen A, Rae W D M  
*Shell Model Computer Code OXBASH* (1984)
- [Bru77] Brussaard P J, Glaudemans P W M  
*Shell Model Applications in Nuclear Spectroscopy* – North Holland (1977)
- [Cau90] Caurier E  
*Shell Model Computer Code ANTOINE* – Strasbourg (1990)
- [Dob91] Dobaczewski J, Geyer H B, Hahne F J W  
*Phys. Rev. C* – 44/1030 (1991)
- [Duf96] Dufour M, Zuker A P  
*Phys. Rev. C* – 54/1641 (1996)
- [Dys56] Dyson J F  
*Phys. Rev.* – 102/1217 (1956)
- [Ell81] Elliott J P, Evans J A  
*Phys. Lett. B* – 101/216 (1981)
- [Ell96] Elliott J P, Evans J A, Lac V S, Long G L  
*Nucl. Phys. A* – 609/1 (1996)
- [Eng96] Engel J, Langanke K, Vogel P  
*Phys. Lett. B* – 389/211 (1996)
- [Fee37] Feenberg E, Wigner E P  
*Phys. Rev.* – 51/15 (1937)
- [Flo64] Flowers B H, Szpikowski S  
*Proc. Phys. Soc.* – 84/673 (1964)
- [Gin95] Ginocchio J N, Johnson C W  
*Phys. Rev. C* – 51/1861 (1995)
- [Hal84] Halse P, Elliott J P, Evans J A  
*Nucl. Phys. A* – 417/301 (1984)
- [Hal85] Halse P  
*Nucl. Phys. A* – 445/93 (1985)
- [Han87] Han Q Z, Sun H Z, Li G H  
*Phys. Rev. C* – 35/786 (1987)



- [Hec69] Hecht K T, Pang S C  
J. Math. Phys. – 10/9 (1969)
- [Hol40] Holstein T, Primakoff H  
Phys. Rev. – 58/1098 (1940)
- [Jan71] Janssen D, Dönauf F, Frauendorf S  
Nucl. Phys. A – 172/145 (1971)
- [Kaj98] Kajiyama A, Taniguchi K, Miyanishi Y  
Preprint <http://xxx.lanl.gov/nucl-th/9806091> (1998)
- [Kim88] Kim G K, Vincent C M  
Phys. Rev C – 37/2176 (1988)
- [Kot99] Kota V K B  
à paraître dans *Ann. Phys.*
- [Kuc89] Kuchta R  
Nucl. Phys. A – 503/501 (1989)
- [Mar64] Marumori T, Yamamura M, Tokunaga A  
Prog. Theor. Phys. - 31/1009 (1964)
- [Mar74] Marshalek E R  
Nucl. Phys. A – 224/221 (1974)
- [Mos69] Moshinsky M  
*The Harmonic Oscillator in Modern Physics* – Gordon and Breach (1969)
- [Nak97] Nakada H, Otsuka T  
Phys. Rev. C – 55/748 (1997)
- [Nav93] Navratil P, Geyer H B  
Nucl. Phys. A – 556/165 (1993)
- [Ots78a] Otsuka T, Arima A, Iachello F, Talmi I  
Phys. Lett. B – 76/139 (1978)
- [Ots78b] Otsuka T, Arima A, Iachello F  
Nucl. Phys. A – 309/1 (1978)
- [Par87] Park P  
Phys. Rev C – 35/807 (1987)
- [Pov98] Poves A, Martinez-Pinedo G  
Phys. Lett. B – 430/203 (1998)
- [Sat97] Satula W, Dean D J, Gary J, Mizutori S, Nazarewicz W  
Phys. Lett. B – 407/103 (1997)
- [Sko90] Skouras L D, Van Isacker P, Nagarajan M A  
Nucl. Phys. A – 516/255 (1990)



- [Sug97] Sugita M  
*Phys. Lett. B* – 394/235 (1997)
- [Tak86] Takada K  
*Phys. Rev. C* – 34/750 (1986)
- [Tak88] Takada K  
*Phys. Rev. C* – 38/2450 (1988)
- [Tal93] Talmi I  
*Simple Models of Complex Nuclei* – Harwood Academic Publishers (1993)
- [Van98] Van Isacker P, Dukelsky J, Pittel S, Juillet O  
*J. Phys. G* – 24/1261 (1998)
- [Vin89] Vincent C M, Henry L J, Kim G K  
*Phys. Rev. C* – 39/1583 (1989)
- [War83] Warner D D, Casten R F  
*Phys. Rev. C* – 28/1798 (1983)
- [Yos96] Yoshinaga N, Mizusaki T, Arima A, Devi Y D  
*Prog. Theo. Phys.* – Supplément 125/65 (1996)



## Conclusion et Perspectives

L'originalité de ce travail de thèse se situe dans la mise en exergue de la pertinence d'une pseudo-symétrie de Wigner pour interpréter les noyaux exotiques  $N = Z$  situés juste au-delà du Nickel 56. Rattachée à une algèbre  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  combinant les degrés de liberté d'isospin et de pseudo-spin, cette invariance a en outre un fondement microscopique de par sa relation avec des caractéristiques universelles de l'interaction nucléaire effective comme son caractère attractif à courte portée, sa localisation essentiellement à la surface du noyau ou la quasi-égalité en valeur absolue des champs moyens relativistes scalaire et vectoriel auxquels elle donne naissance.

Concrètement, nous avons effectivement montré que la classification  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  constitue un schéma d'approximation raisonnable dans les noyaux  $N \approx Z$  de masse  $A \approx 60$  avec un certain nombre de conséquences physiques tel un effet de déformation dans les transitions Gamow-Teller ou la persistance de singularités au niveau de la double différence de masse  $\delta V_{np}$ . Dans ce contexte, les mesures de masses et des probabilités de décroissance  $\beta^+$  dans la région  $pf_{5/2}$  ( $N, Z = 28 \rightarrow 40$ ) présentent donc un intérêt certain. Sur le plan théorique, des investigations plus systématiques dans le contexte du modèle en couches semblent néanmoins nécessaires pour déterminer l'évolution du recouvrement avec le formalisme  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  à l'intérieur de l'ensemble de l'espace pseudo- $sd$  ainsi que pour examiner l'influence de l'introduction des couches  $f_{7/2}$  et/ou  $g_{9/2}$  sur ce même recouvrement.

Par ailleurs, notre étude analytique du modèle IBM-4( $l=0$ ) suggère que la limite  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  dans le canal  $\tilde{L}=0$  implique en réalité une condensation en structures de type  $\alpha$  précisément constituées d'une superposition équiprobable de 2 paires ( $\tilde{S}=0, T=1$ ) et de 2 paires ( $\tilde{S}=1, T=0$ ) toujours couplées à un pseudo-spin et à un isospin total nul. Il serait alors intéressant de tester directement la réalité de ces agglomérats en les utilisant par exemple comme kets d'essai dans des approches variationnelles<sup>(i)</sup>. Un simple calcul du recouvrement avec un état réaliste permettrait finalement de valider sans ambiguïté l'existence de corrélations en quartets dans les noyaux  $N = Z$  de masse  $A \approx 60 - 70$ .

---

(i) Pour un noyau pair-pair  $N = Z$  constitué de  $\mathcal{N}$  particules dans l'espace pseudo- $sd$ , on pourrait ainsi envisager de décrire le niveau fondamental par un vecteur de la forme :

$$|\Psi(\mathcal{N}, \lambda)\rangle \propto (A_{0,1}^* A_{0,1}^* - \lambda A_{1,0}^* A_{1,0}^*)^{\mathcal{N}/4} | \rangle$$

où  $A_{\tilde{S},T}^* = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\Omega}}} \sum_i \sqrt{2\tilde{l}+1} [a_{i,1/2,1/2}^* \otimes a_{i,1/2,1/2}^*]^{\tilde{L}=0, \tilde{S}, T}$  avec  $\tilde{\Omega} = \sum_i (2\tilde{l}+1)$  et où  $\lambda$  est un paramètre déterminé de façon à minimiser l'énergie moyenne du système.



Les résultats présentés apportent également un éclaircissement sur le problème largement discuté de la structure en paires des systèmes lourds de faible isospin. Toujours grâce à la réalisation IBM-4 ( $l=0$ ), nous avons effectivement mis en évidence que la restriction de la symétrie  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  à la seule voie  $\tilde{L}=0$  implique la présence d'un même nombre de paires isoscalaires et isovectorielles dans l'état fondamental  $J=0, T=0$  des noyaux pair-pair  $N=Z$ . Au contraire, les structures impair-impair se caractérisent par la présence de 2 niveaux dégénérés  $J=1, T=0$  et  $J=0, T=1$  entre lesquels se répartissent les paires à pseudo-spins parallèles avec en outre une prédominance dans l'état  $T=0$  d'autant plus prononcée que le nombre de particules est faible. Dès lors, il est clair qu'une étude similaire dans le cadre du modèle IBM-4 complet serait fort intéressante pour déceler une éventuelle sensibilité aux degrés de liberté pseudo-orbitaux.

Il faut encore signaler que même s'il est faible, le pseudo-couplage spin-orbite induit néanmoins un mélange des représentations irréductibles de  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  dont les conséquences sont loin d'être négligeables. Après l'avoir constaté numériquement, nous avons en effet pu déduire analytiquement qu'en présence d'un appariement majoritairement isoscalaire, ce potentiel défavorise le développement de corrélations  $\tilde{L}=0$  à isospin nul. C'est ainsi que dans les noyaux impair-impair  $N=Z$ , la pseudo-interaction spin-orbite entraîne par exemple une stabilisation, croissante avec le nombre de particules, de l'état  $J=0, T=1$ . De nouveau, il pourrait être instructif de généraliser cette étude afin de savoir si un même effet apparaît sur toutes les corrélations  $T=0$ .

Enfin, la classification  $SU_{\tilde{S}T}(4)$  de l'espace  $pf_{5/2}$  nous a permis de tester l'approximation IBM-4 en diagonalisant pour la première fois un hamiltonien complet déduit microscopiquement d'une interaction résiduelle réaliste. La qualité des résultats obtenus, essentiellement pour les noyaux impair-impair  $N=Z$  et en dehors de tout processus de renormalisation ou de dépendance vis-à-vis du nombre de bosons, permet raisonnablement d'envisager l'extraction d'une paramétrisation phénoménologique utilisable dans un domaine dépassant la zone pseudo- $sd$ . Après un examen des transitions électromagnétiques, que nous n'avons pas abordées dans ce travail par manque de temps, l'approche IBM-4 pourrait alors s'avérer constituer une alternative intéressante au modèle en couches standard pour élucider la structure collective de la ligne exotique  $N=Z=28 \rightarrow 50$ .

Les activités de recherche, dont ce mémoire fait l'objet, démontrent ainsi qu'en dépit de leur introduction dès les premiers développements de la physique nucléaire, les concepts de symétrie continuent à fournir une vision novatrice et souvent fructueuse de la problématique actuelle du noyau atomique. Plus généralement, nous espérons que les travaux présentés convaincront de la prééminence des démarches algébriques dans l'appréhension quantique des systèmes mésoscopiques.



## Annexe

*Calcul IBM-4( $l=0$ ) des éléments de matrice de l'opérateur de Casimir  $C_2[SU_{ST}(4)]$   
dans une base  $SU_S(3) \otimes SU_T(3)$*

Commençons par rappeler que dans l'approche IBM-4( $l=0$ ), le groupe  $SU_{ST}(4)$  peut être généré par les opérateurs suivants :

$$S_\mu = \sqrt{2} \left[ b_{1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{1,0} \right]_{M_S=\mu, M_T=0}^{S=1, T=0} \quad (\text{moment cinétique de spin}) \quad (\text{A.1})$$

$$T_\mu = \sqrt{2} \left[ b_{0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{0,1} \right]_{M_S=0, M_T=\mu}^{S=0, T=1} \quad (\text{isospin}) \quad (\text{A.2})$$

$$(Y_+)_{\mu, \nu} = \left[ b_{0,1}^+ \otimes \tilde{b}_{1,0} \right]_{M_S=\mu, M_T=\nu}^{S=1, T=1} + \left[ b_{1,0}^+ \otimes \tilde{b}_{0,1} \right]_{M_S=\mu, M_T=\nu}^{S=1, T=1} \quad (\text{opérateur type Gamow-Teller}) \quad (\text{A.3})$$

En utilisant l'expression générale (1.28) de l'invariant quadratique d'un groupe semi-simple, on montre alors que l'opérateur  $C_2[SU_{ST}(4)]$  du modèle IBM-4( $l=0$ ) s'exprime sous la forme :

$$C_2[SU_{ST}(4)] = 3 \left[ Y_+ \otimes Y_+ \right]_{M_S=0, M_T=0}^{S=0, T=0} + S^2 + T^2 \quad (\text{A.4})$$

Par ailleurs, en recouplant  $\left[ Y_+ \otimes Y_+ \right]_{M_S=0, M_T=0}^{S=0, T=0}$ , il vient :

$$\left[ Y_+ \otimes Y_+ \right]_{M_S=0, M_T=0}^{S=0, T=0} = \frac{1}{3} (u_{1,0} u_{0,1}^+ + u_{0,1} u_{1,0}^+ + 2\hat{N}_{0,1} \hat{N}_{1,0} + 3\hat{N}_{0,1} + 3\hat{N}_{1,0}) \quad (\text{A.5})$$

avec :

$$\hat{N}_{s,t} = \sqrt{(2s+1)(2t+1)} \left[ b_{s,t}^+ \otimes \tilde{b}_{s,t} \right]_{M_S=0, M_T=0}^{S=0, T=0} \quad (\text{A.6})$$

$$\text{et } u_{s,t} = \sqrt{(2s+1)(2t+1)} \left[ b_{s,t}^+ \otimes b_{s,t}^+ \right]_{M_S=0, M_T=0}^{S=0, T=0} \quad (\text{A.7})$$

En conséquence, les éléments de matrice de l'opérateur (A.4) dans la base  $|\mathcal{N}, (\omega, \mathcal{N}-\omega), SM_S, TM_T\rangle$  ( $\omega$  étant le nombre de bosons  $s=1, t=0$ ) associée à la limite  $SU_S(3) \otimes SU_T(3)$  sont donc donnés par :

$$V_{\lambda, \omega_1, \omega_2}^{\mathcal{N}, S, T} = \langle \mathcal{N}, (\omega_1, \mathcal{N}-\omega_1), SM_S, TM_T | u_{1,0} u_{0,1}^+ + u_{0,1} u_{1,0}^+ | \mathcal{N}, (\omega_2, \mathcal{N}-\omega_2), SM_S, TM_T \rangle + \dots \\ \delta_{\omega_1, \omega_2} [2\omega_1(\mathcal{N}-\omega_1) + 3\mathcal{N} + S(S+1) + T(T+1)] \quad (\text{A.8})$$



Or en insérant une relation de fermeture dans la première partie de cet élément, on a :

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{N}, (\omega_1, \mathcal{N} - \omega_1), SM_S, TM_T | u_{1,0} u_{0,1}^+ | \mathcal{N}, (\omega_2, \mathcal{N} - \omega_2), SM_S, TM_T \rangle = \dots \\ & = \sum_{\mathcal{N}_0, \omega_0, S_0 M_{S_0}, T_0 M_{T_0}} \langle \mathcal{N}, (\omega_1, \mathcal{N} - \omega_1), SM_S, TM_T | u_{1,0} | \mathcal{N}_0, (\omega_0, \mathcal{N}_0 - \omega_0), S_0 M_{S_0}, T_0 M_{T_0} \rangle \dots \\ & \quad \langle \mathcal{N}, (\omega_2, \mathcal{N} - \omega_2), SM_S, TM_T | u_{0,1} | \mathcal{N}_0, (\omega_0, \mathcal{N}_0 - \omega_0), S_0 M_{S_0}, T_0 M_{T_0} \rangle^* \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Mais  $u_{s,t}$  étant scalaire dans les espaces de spin et d'isospin tout en créant 2 bosons  $(s, t)$ , seules les combinaisons suivantes apportent une contribution non nulle à la somme :

$$\begin{aligned} S_0, M_{S_0} &= S, M_S ; T, M_T = T_0, M_{T_0} \\ \mathcal{N} &= \mathcal{N}_0 + 2 ; \omega_1 = \omega_0 + 2 ; \mathcal{N} - \omega_2 = \mathcal{N}_0 - \omega_0 + 2 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{N}, (\omega_1, \mathcal{N} - \omega_1), SM_S, TM_T | u_{1,0} u_{0,1}^+ | \mathcal{N}, (\omega_2, \mathcal{N} - \omega_2), SM_S, TM_T \rangle = \dots \\ & \delta_{\omega_2, \omega_1 - 2} \langle \mathcal{N}, (\omega_1, \mathcal{N} - \omega_1), SM_S, TM_T | u_{1,0} | \mathcal{N} - 2, (\omega_1 - 2, \mathcal{N} - \omega_1), SM_S, TM_T \rangle \dots \\ & \quad \langle \mathcal{N}, (\omega_2, \mathcal{N} - \omega_2), SM_S, TM_T | u_{0,1} | \mathcal{N} - 2, (\omega_2, \mathcal{N} - \omega_2 - 2), SM_S, TM_T \rangle^* \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Il en résulte donc que les seuls éléments de matrice non nuls de l'observable  $C_2[SU_{ST}(4)]$  dans la base  $SU_S(3) \otimes SU_T(3)$  s'écrivent :

$$V_{\lambda, \omega, \omega}^{\mathcal{N}, S, T} = 2\omega(\mathcal{N} - \omega) + 3\mathcal{N} + S(S+1) + T(T+1) \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} V_{\lambda, \omega, \omega-2}^{\mathcal{N}, S, T} &= \langle \mathcal{N}, (\omega, \mathcal{N} - \omega), SM_S, TM_T | u_{1,0} | \mathcal{N} - 2, (\omega - 2, \mathcal{N} - \omega), SM_S, TM_T \rangle \dots \\ & \quad \langle \mathcal{N}, (\omega - 2, \mathcal{N} - \omega + 2), SM_S, TM_T | u_{0,1} | \mathcal{N} - 2, (\omega - 2, \mathcal{N} - \omega), SM_S, TM_T \rangle^* \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} V_{\lambda, \omega, \omega+2}^{\mathcal{N}, S, T} &= \langle \mathcal{N}, (\omega, \mathcal{N} - \omega), SM_S, TM_T | u_{0,1} | \mathcal{N} - 2, (\omega, \mathcal{N} - \omega - 2), SM_S, TM_T \rangle \dots \\ & \quad \langle \mathcal{N}, (\omega + 2, \mathcal{N} - \omega - 2), SM_S, TM_T | u_{1,0} | \mathcal{N} - 2, (\omega, \mathcal{N} - \omega - 2), SM_S, TM_T \rangle^* \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Il apparaît donc ainsi que tout le calcul est ramené à l'évaluation de l'élément  $X(\omega, J) = \langle \omega, JM | \sqrt{3} [p^+ \otimes p^+]_0^0 | \omega - 2, JM \rangle$  relatif à un système de bosons  $p_{\mu=-1,0,1}^+$  caractérisés par un moment cinétique individuel  $j=1$  et donc rattachés au groupe unitaire  $U(3)$ . Algébriquement, les kets  $|\omega, JM\rangle$  à  $\omega$  particules sont alors associés à la chaîne de réduction :

$$\left| \begin{array}{ccc} U(3) & \supset & SO(3) & \supset & SO(2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ [\omega] & & J & & M \end{array} \right\rangle, \quad (\text{A.15})$$

de sorte que, compte tenu des règles de branchement du tableau (1.82), on a :

$$J = \omega, \omega - 2, \omega - 4, \dots, 0 \text{ ou } 1 \quad (\text{A.16})$$



D'autre part, en introduisant une relation de fermeture entre les 2 opérateurs  $p^+$  de l'élément  $X(\omega, J)$  ainsi qu'en utilisant le théorème de Wigner-Eckart (1.63) pour la réduction  $SO(3) \supset SO(2)$ , on obtient :

$$X(\omega, J) = \frac{I}{(2J+I)^{3/2}} \sum_{J', M', \mu} \frac{(-I)^{I-\mu}}{\sqrt{2J'+I}} \langle JM; I-\mu | J' M' \rangle \langle J' M'; I\mu | JM \rangle \dots$$

$$\langle \omega, J \| p^+ \| \omega - I, J' \rangle_{SO(3)} \langle \omega - I, J' \| p^+ \| \omega - 2, J' \rangle_{SO(3)} \quad (A.17)$$

soit, après simplification grâce aux propriétés de symétrie et d'orthogonalité des coefficients de Clebsch-Gordan :

$$X(\omega, J) = \frac{I}{2J+I} \sum_{J'} (-I)^{J'+J'+I} \langle \omega, J \| p^+ \| \omega - I, J' \rangle_{SO(3)} \langle \omega - I, J' \| p^+ \| \omega - 2, J' \rangle_{SO(3)} \quad (A.18)$$

Or, toujours par application du théorème de Wigner-Eckart mais maintenant pour la réduction  $U(3) \supset SO(3)$ , il vient :

$$\langle \omega, JM | p_\mu^+ | \omega - I, J' M' \rangle = \frac{I}{d_{[\omega-I]}} \langle [\omega - I] (J' M'); [I] (I\mu) | [\omega] (JM) \rangle \langle \omega \| p^+ \| \omega - I \rangle_{U(3)} \quad (A.19)$$

où  $d_{[\omega-I]}$  est la dimension de la RI  $[\omega - I]$  du groupe  $U(3)$  et où le coefficient de couplage peut s'évaluer grâce au lemme de Racah (1.83) :

$$\langle [\omega - I] (J' M'); [I] (I\mu) | [\omega] (JM) \rangle = \left\langle \begin{matrix} [\omega - I] & [I] \\ J' & I \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\omega] \\ J \end{matrix} \right\rangle_{SO(3)}^{U(3)} \langle J' M'; I\mu | JM \rangle \quad (A.20)$$

Mais on peut bien sur aussi écrire :

$$\langle \omega, JM | p_\mu^+ | \omega - I, J' M' \rangle = \frac{I}{\sqrt{2J'+I}} \langle J' M'; I\mu | JM \rangle \langle \omega, J \| p^+ \| \omega - I, J' \rangle_{SO(3)} \quad (A.21)$$

D'où :

$$\langle \omega, J \| p^+ \| \omega - I, J' \rangle_{SO(3)} = \left\langle \begin{matrix} [\omega - I] & [I] \\ J' & I \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\omega] \\ J \end{matrix} \right\rangle_{SO(3)}^{U(3)} \frac{\sqrt{2J'+I}}{d_{[\omega-I]}} \langle \omega \| p^+ \| \omega - I \rangle_{U(3)} \quad (A.22)$$

A ce moment-là, utilisons l'égalité (A.19) pour  $J = M = \omega$ ,  $\mu = I$ ,  $J' = M' = \omega - I$ . Dans ces conditions, le coefficient de couplage vaut 1 par normalisation et de plus une réalisation explicite des vecteurs  $|\omega, JM\rangle$ ,  $|\omega - I, J' M'\rangle$  en termes des bosons  $p_\mu^+$  est immédiate :

$$|\omega, JM\rangle = \frac{I}{\sqrt{\omega!}} (p_i^+)^{\omega} | \rangle \text{ et } |\omega - I, J' M'\rangle = \frac{I}{\sqrt{(\omega - I)!}} (p_i^+)^{\omega - I} | \rangle$$

$$\Rightarrow \frac{I}{\sqrt{\omega! (\omega - I)!}} \langle | (p_i)^{\omega} p_i^+ (p_i^+)^{\omega - I} | \rangle = \sqrt{\omega} = \frac{I}{d_{[\omega-I]}} \langle \omega \| p^+ \| \omega - I \rangle_{U(3)}$$



Ainsi :

$$\langle \omega, J \| p^+ \| \omega - 1, J' \rangle_{SO(3)} = \left\langle \begin{matrix} [\omega - 1] & [1] \\ J' & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\omega] \\ J \end{matrix} \right\rangle_{SO(3)}^{U(3)} \sqrt{\omega} \quad (A.23)$$

En outre, la règle (A.16) déterminant les valeurs possibles du moment cinétique d'un système de bosons  $p$  implique l'impossibilité d'avoir  $J' = J$  dans le développement (A.18). Seuls les cas  $J' = J \pm 1$  subsistent donc et par suite :

$$X(\omega, J) = \sqrt{\frac{\omega(\omega-1)}{2J+1}} \left[ \left\langle \begin{matrix} [\omega-1] & [1] \\ J-1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\omega] \\ J \end{matrix} \right\rangle_{SO(3)}^{U(3)} \left\langle \begin{matrix} [\omega-2] & [1] \\ J & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\omega-1] \\ J-1 \end{matrix} \right\rangle_{SO(3)}^{U(3)} \dots \right. \\ \left. \left\langle \begin{matrix} [\omega-1] & [1] \\ J+1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\omega] \\ J \end{matrix} \right\rangle_{SO(3)}^{U(3)} \left\langle \begin{matrix} [\omega-2] & [1] \\ J & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} [\omega-1] \\ J+1 \end{matrix} \right\rangle_{SO(3)}^{U(3)} \right] \quad (A.24)$$

Les facteurs isoscalaires qui apparaissent dans cette expression sont par ailleurs analytiquement connus [Ell58] et finalement :

$$X(\omega, J) = -\sqrt{(\omega - J)(\omega + J + 1)} \quad (A.25)$$

Il en résulte alors immédiatement l'expression suivante pour les seuls éléments de matrice inconnus (A.13) et (A.14) de l'opérateur  $C_2[SU_{ST}(4)]$  dans la base  $SU_s(3) \otimes SU_t(3)$  :

$$V_{\lambda, \omega, \omega-2}^{\mathcal{N}, S, T} = X(\omega, S) X(\mathcal{N} - \omega + 2, T)^* = \sqrt{(\omega - S)(\omega + S + 1)(\mathcal{N} - \omega - T + 2)(\mathcal{N} - \omega + T + 3)}$$

$$V_{\lambda, \omega, \omega+2}^{\mathcal{N}, S, T} = X(\mathcal{N} - \omega, T) X(\omega + 2, S)^* = \sqrt{(\omega - S)(\omega + S + 1)(\mathcal{N} - \omega - T + 2)(\mathcal{N} - \omega + T + 3)}$$

Compte tenu de la relation (A.12),  $V_{\lambda, \omega, \omega}^{\mathcal{N}, S, T} = 2\omega(\mathcal{N} - \omega) + 3\mathcal{N} + S(S+1) + T(T+1)$ , on retrouve bien les résultats annoncés dans le paragraphe I-4 du chapitre 3.

## Référence

- [Ell58] Elliott J P  
*Proc. Roy. Soc. (London) A* – 245/128 et 245/562 (1958)



## Résumé

Avec le développement des faisceaux radioactifs, un intérêt particulier est actuellement porté aux noyaux exotiques riches en protons. Ces structures offrent en effet la possibilité de développer une superfluidité proton-neutron dont l'importance vis à vis des corrélations d'appariement entre nucléons identiques fait l'objet de nombreuses études théoriques. Le travail présenté propose précisément d'aborder ce problème dans le cadre d'une approche algébrique basée sur une symétrie  $SU(4)$  de Wigner combinant les degrés de liberté de pseudo-spin et d'isospin. Après avoir repris en détail les implémentations de la théorie des groupes en mécanique quantique, la pertinence de la classification pseudo- $SU(4)$  est directement montrée au niveau des états réalistes du modèle en couches. Ses conséquences au niveau des masses et des transitions de décroissance  $\beta$  sont également analysées. Sa réalisation partielle en bosons de moment orbital nul est de plus utilisée pour mettre en évidence un certain nombre de phénomènes physiques spécifiques à la ligne  $N=Z$  comme la condensation en structures de type  $\alpha$  ou la destruction par le potentiel spin-orbite des corrélations superfluides isoscalaires. Enfin, un autre schéma de bosonisation incluant des degrés de liberté quadrupolaires (modèle IBM-4) est testé pour la première fois en diagonalisant un hamiltonien complet déduit d'une interaction réaliste du modèle en couches. La qualité des résultats obtenus, plus particulièrement pour les noyaux impair-impair, permet raisonnablement d'envisager l'utilisation de cette approximation en bosons comme alternative aux approches fermioniques standard pour élucider la structure collective de la ligne exotique  $N \sim Z = 28-50$ .

## Abstract

With the development of radioactive beams, an area of intense research in nuclear physics concerns the structure of exotic systems with roughly equal numbers of protons and neutrons. These nuclei might in fact develop a proton-neutron superfluidity whose importance compared to pairing correlations between like nucleons is currently investigated. The work presented in this thesis suggests to look at such a competition in an algebraic framework based on a Wigner  $SU(4)$  symmetry that combines the pseudo-spin and isospin degrees of freedom. After a detailed review of group theory in quantum mechanics, the validity of the pseudo- $SU(4)$  classification is shown via a direct analysis of realistic shell model states. Its consequences on binding energies and  $\beta$  decay are also studied. Moreover, a simplified boson realisation with zero orbital angular momentum is used to find some physical features of  $N=Z$  nuclei such as the condensation of  $\alpha$ -like structures or the destruction of isoscalar superfluid correlations by the spin-orbit potential. Finally, another bosonisation scheme that includes quadrupole degrees of freedom (IBM-4 model) is tested for the first time by diagonalization of a full hamiltonian deduced from a realistic shell model interaction. The quality of the results, especially for odd-odd nuclei, allows one to consider this boson approximation as an alternative to standard fermionic approaches for the collective structure of the exotic line  $N \sim Z = 28-50$ .